Theorie der numerischen Berechnung der Constanten der inneren und äusseren Reibung von Gasen und Flüssigkeiten mittelst schwingender Scheiben; nebst experimenteller Untersuchung der äusseren Reibung zwischen Wasser und Quecksilber.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

Philosophischen Facultät der Königlichen Universität Breslau

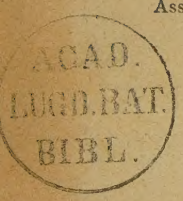
zur Erlangung der Doctorwürde

Sonnabend, den 29. Mai 1880, Vormittags 12 Uhr

öffentlich vertheidigen wird

LOUIS GROSSMANN

Assistent a. d. Königl. Forstakademie zu Neustadt-Eberswalde



gegen die Herren Opponenten:

Paul Moritz Schmidt, Dr. phil.
Ludwig Lübeck, cand. math.
Hans Fritsche, cand. jur.

Druck der Breslauer Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G.
Ursulinerstrasse 1.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn

PROFESSOR DR. O. E. MEYER

ehrerbietigst

in Hochachtung und Dankbarkeit

vom Verfasser

gewidmet.

Inhalt.

Seite.

A. Einleitung 1
B. Mein Apparat und seine Constanten. 5
I. Mein Apparat 5
II. Constanten des Apparats 7
C. Theoretisch-experimenteller Theil 10
I. Entwicklung der Differentialgleichungen des Problems . . 10
II. Theorie der Bestimmung der inneren Reibung 16
1. Coulomb's Methode 17
a. Entwicklung der Formeln für Gase. 17
b. Discussion der erhaltenen Formeln 19
α. Relative Grösse der Constanten meiner Theorie . . 19
β. Coulomb's Gesetz der Proportionalität der Decremente mit den vierten Potenzen der Radien 20
c. Formeln zur Bestimmung der inneren Reibung einer Flüssigkeit 20
d. Dimensionen der in der Rechnung auftretenden Constanten in absoluten Maassen 21
e. Berechnung der inneren Reibungsconstanten von Luft und Wasser aus eigenen Beobachtungen nach Coulomb's Methode 21
f. Berechnung von früheren Beobachtungen des Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer. 24
2. J. Clerk Maxwell's Methode 27
a. Entwicklung der Formeln für Gase 27
b. Discussion der Formeln 30
α. Grenze für die Fortpflanzung der Bewegung . . . 30
β. Relative Grösse der aus meinen Formeln berechneten Constanten 32
c. Formeln zur Berechnung des reinen Maxwell'schen Experiments 33
d. Modification der Formeln für Flüssigkeiten 35
e. Berechnung von Puluj's, nach Maxwell's Methode angestellten Beobachtungen 37
f. Berechnung der von Kundt und Warburg nach Maxwell's Methode ausgeführten Beobachtungen. 38

Seite

3. Eine andere Modification der Coulomb'schen Methode . . 41
4. Methode zur Bestimmung der inneren Reibung von schweren und zähen Flüssigkeiten 43

III. Bestimmung der äusseren Reibung eines gasförmigen oder flüssigen Mediums mit einem festen Körper 44
1. Die äussere Reibung ist unendlich 44
2. Die äussere Reibungsconstante ist endlich 44

IV. Bestimmung der äusseren Reibungsconstante zweier liquiden Medien 46
1. Die Reibungsconstante ist unendlich 46
a. Entwicklung der Formeln 46
b. Bemerkungen über die Ausführung numerischer Rechnungen nach den entwickelten Formeln 48
c. Berechnung der inneren Reibungsconstante des Quecksilbers aus eigenen Beobachtungen 49
2. Die äussere Reibung ist endlich; es findet ein Gleiten statt 53
a. Entwicklung der Gleichungen 53
b. Zusammenhang mit den früheren Problemen 55

D. Schluss 56

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 1, Zeile 4 von unten siehe ebenso statt eben.
Seite 8, Zeile 7 von unten Kol. 3 siehe mgr. statt mm.
Seite 11, Zeile 11 von oben siehe vernachlässigen statt vernachlässige.
Seite 14, Zeile 5 von unten siehe $\left(\frac{d^2\Theta}{dt\,dy}\right)_0$ statt $\left(\frac{d^2\Theta}{dt\,dy}\right)$
Seite 15, Zeile 17 von unten siehe III statt II.
Seite 17, Zeile 5 von unten siehe Ruhelage statt Ruhelade.
Seite 29, Zeile 5 von oben siehe $64K\lambda$ statt $64R\lambda$.
Seite 25, Zeile 9 von oben siehe $\sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{\rho_k \mu_k}$ statt $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k \mu_k}$.
Seite 26, Zeile 14 von unten siehe gesuchten statt gemischten.
Seite 26, Zeile 8 von unten (Columne A) siehe 1,0828 statt 1,0328.
Seite 34, Zeile 2 von oben siehe im Zähler $4b\lambda K$ statt $4b\eta K$.
Seite 42, Zeilen 2, 6, 7 von unten siehe a_5 und a_6 statt a_7 und a_8.
Seite 54, Zeile 1 von oben siehe $\mu_2\tau$ statt $\mu_3\tau$.

A. Einleitung.

Dem Sprachgebrauch gemäss, welcher die Kraft, mit der ein über einen anderen langsamer bewegten hinweggleitender Körper durch den Contact in seiner Bewegung gehemmt, resp. dieser beschleunigt wird, mit Reibung bezeichnet, übertrug man diesen Begriff auch auf die Gase und Flüssigkeiten, musste aber hier eine Reibung zweifacher Art unterscheiden.

Jener Reibung fester Körper analog ist die sogenannte »äussere Reibung«, welche ein gasförmiges oder flüssiges Medium bei seiner Bewegung längs eines flüssigen oder festen Mediums an der Grenzfläche erleidet. Neben dieser unterscheidet man die »innere Reibung,« welche von grösserer Bedeutung ist und die Kraft bezeichnet, mit welcher die der Bewegungsrichtung parallelen inneren Schichten in der Richtung der Bewegung durch Contact auf einander wirken. Als Maass dieser Kräfte dienen gewisse Constanten, welche man kurz als äussere und innere Reibungsconstante bezeichnen kann; sie sind in absoluten Maassen von verschiedenen Dimensionen, also nicht vergleichbar. Die Constante der äusseren Reibung ist im Allgemeinen sehr gross; während für feste Körper die der inneren Reibung, welche ja eben begrifflich zulässig ist, fast unendlich erscheint.

Den Begriff der inneren Reibung der Flüssigkeiten hat wohl Newton[1]) zuerst rechnend in die Physik eingeführt,

[1]) Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687.

indem er durch naturgemässe Hypothesen die Möglichkeit gab, die Kraft der Reibung durch die üblichen mechanischen Maasse auszudrücken und so analytisch in die Gleichungen der Mechanik einzuführen. In gleicher Weise muss jede Kraft durch gewisse Hypothesen eingeführt werden, und das Wesen der mathematischen Physik besteht eben darin, einen Ausdruck für die Kraft aus der durch sie resultirenden Bewegung abzuleiten und gleich demjenigen zu setzen, den die Hypothesen liefern. Da jener Ausdruck wesentlich durch geometrische Anschauung gewonnen wird, so kann man sagen: Jede Gleichung der Physik ist der mathematische Ausdruck der geometrischen Verkörperung eines physikalischen Gedankens.

Newton setzte die Reibung proportional der Differenz der Geschwindigkeiten, der Grösse des Contacts der reibenden Flächen, und unabhängig vom Druck: Hypothesen, welche vom Experiment zu bestätigen waren, und ihre volle Bestätigung gefunden haben.

Es kam nun darauf an, die Reibungsconstanten numerisch zu bestimmen; von den verschiedenen Methoden sind es insbesondere die Coulomb'sche, Maxwell'sche und die Transpirationsmethode, welche zur Berechnung der Constanten verwandt werden. Die Rechnung lässt sich für die ersteren Methoden nur approximativ und für die letzte auch nur unter gewissen vereinfachenden Annahmen führen. Daher fallen die Werthe, welche die einzelnen Versuchsarten ergeben, verschieden aus, ja jede veränderte Anordnung desselben Versuchs führt bereits zu etwas anderen Werthen, welche Verschiedenheit nicht allein auf die Schwierigkeit der Beobachtung zurückzuführen ist. Um diese Divergenz der nach den genannten Methoden berechneten Reibungsconstanten zur Anschauung zu bringen, habe ich im Folgenden die innere Reibungsconstante für Luft und Wasser zusammengestellt, wie sie einige Beobachter gefunden haben, bezogen auf mgr., mm., sec.:

Luft

Beobachter	Methode	μ als Function der Temperatur ϑ (C°)	μ bei 15°,0 C.	μ bei 18°,0 C.
O. E. Meyer	C	—	—	0,036
,,	C	—	0,0275	—
,, (Graham)	T	—	0,0178	—
Maxwell	M	$0{,}01878\,(1+0{,}00365\,\vartheta)$	0,01984	0,02001
O. E. Meyer	M	—	—	0,019
,,	T	$0{,}0174\cdot(1+0{,}0030\,\vartheta)$	0,01821	0,01835
,,	M	$0{,}0186\cdot(1+0{,}003\,\vartheta)$	0,01946	0,01960
v. Obermayer	T	$0{,}016747\,(1+0{,}00272\,\vartheta)$	0,017545	0,017568
,,	T	$0{,}01706\,(1+0{,}002735\,\vartheta)$	0,017876	0,017900
Puluj	T	$0{,}01789\,(1+0{,}0024\,\vartheta)$	0,018651	0,01867
,,	M	—	—	0,01917
Kundt u. Warburg	M	—	0,0189	—

Wasser

Beobachter	Methode	μ	C°
Poiseuille	T	1,335	10°
,,	T	1,029	20°
,,	T	0,821	30°
O. E. Meyer	C	1,3935	15°
,,	C	1,3995	15°
,,	C	1,325	15°
,,	C	1,311	15°
O. E. Meyer	C	1,575	10°
,,	C	1,371	15°,5
,,	C	1,299	17°,9
,,	C	1,19	21°,9
O. E. Meyer	C	1,231	19°,7
Hagenbach	T	1,028	,,
O. E. Meyer	C	1,336	16°,7
Jacobson	T	1,114	,,

(Die Bedeutung von C, M, T ist ersichtlich.)

Aus den aufgestellten Differentialgleichungen der Bewegung liquider Medien haben Herr Prof. Dr. O. E. Meyer[1]) und J. Clerk Maxwell[2]) die inneren Reibungsconstanten aus den beiden ersten Methoden zu berechnen gelehrt. Umstehende Zahlen zeigen aber, wie es bisher unmöglich war, die Constanten genau zu ermitteln.

Im Folgenden werde ich nun zeigen, wie die von mir aufgestellten Formeln für den Coulomb'schen und Maxwell'schen Versuch eine untere Grenze für die innere Reibungsconstante ergeben, und werde den Nachweis führen, dass die Formel von Maxwell eine obere Grenze darstellt; es wird sich herausstellen, dass bei einer geeigneten Anordnung des Maxwell'schen Versuchs die Grenzen bis auf 1—2% der gesuchten Constante genähert werden können. Für die Transpirationsmethode bleibt es dagegen unentschieden, ob die bisherigen Formeln zu grosse oder zu kleine Werthe liefern; das Letztere scheint der Fall zu sein.

Ausser jenen beiden Experimenten sollen im Folgenden noch sämmtliche anderen Versuchsanordnungen behandelt und die Formeln zur Rechnung aufgestellt werden, wo die Beobachtung schwingender Scheiben zur Bestimmung von Constanten der inneren und äusseren Reibung führen kann (ohne dass es weiterer Näherungsannahmen bedürfe). Die mit der Theorie in Einklang stehenden Beobachtungen, soweit solche ausgeführt sind, führen den Nachweis, dass die Herleitung der Gleichungen für die von Compression und Dilatation freie Bewegung der Gase aus den für die Dynamik fester Körper geltenden Gesichtspunkten in der Weise, wie ich sie unternehme, erfolgen darf.

Der theoretischen Behandlung der einzelnen Probleme werde ich die Berechnung der eigenen Beobachtungen, soweit solche vorliegen, folgen lassen; zugleich theile ich meine Berechnung einiger, nach Coulomb's Methode von Herrn

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 113. 1861. Diss. Inaugur. Königsberg 1860. Crelle Bd. 59. 1861.

[2]) Phil. Trans. of the R. Soc. of London 1866.

Prof. Dr. O. E. Meyer, sowie der nach Maxwell's Methode ausgeführten Experimente von Puluj und Kundt und Warburg mit. Zum Schluss gebe ich die Berechnung meiner Beobachtungen über die äussere Reibung zwischen Wasser und Quecksilber an. Dieses Problem hatte ich mir nach Ablauf der im Wintersemester 1878/79 unter Leitung der Herren Prof. Dr. O. E. Meyer und Prof. Dr. Dorn und unter Assistenz des Privatdocenten Herrn Dr. Auerbach im physikalischen Cabinet abgehaltenen experimentellen Uebungen, auf Anregung Seitens meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer, gestellt. Eine genügend genaue Lösung dieser Aufgabe ist auf dem angestrebten Wege von mir darum nicht zu erreichen gewesen, weil der Abstand einer horizontal im Wasser schwingenden Scheibe von dem darunter lagernden Quecksilberniveau nicht genügend scharf gemessen werden konnte. Aus diesem Grunde ist mein Resultat, dass das Quecksilber am Wasser haftet, nicht absolut sicher; indessen ist der Betrag der Gleitung sicher nur ein sehr geringer.

B. Mein Apparat und seine Constanten.

I. Mein Apparat.

Durch die freundliche Unterstützung Seitens des Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer war es möglich, den zu den Beobachtungen benutzten Apparat im Lauf der Experimente möglichst zu vervollkommnen. Der bifilar aufgehängte Apparat wurde nicht an der Decke, sondern zum grösseren Schutz gegen Erschütterungen an einem, zwei zusammenstossende Wände verbindenden, kurzen Balken suspendirt; auf der Achse des Apparats befanden sich ausser dem Spiegel noch eine grössere Messing- und eine kleinere Glasscheibe, beide concentrisch mit der Drehungsachse und der Bedingung horizontalen Schwingens möglichst gut entsprechend. Behufs Beobachtung der Schwingung in einer Flüssigkeit war zur Aufnahme dieser ein cylindrisches Gefäss mit hori-

zontalem Boden und vertikalen Wänden construirt worden (wenn ich damit zugleich die gewöhnliche Stellung in's Auge fasse), dessen Dimensionen die Annahme unbegrenzter Flüssigkeit zuliessen. Dieses Gefäss konnte mittelst einer sehr bequemen Handhabe der unteren Scheibe genähert werden. Zu diesem Zweck wurde es auf eine starke kreisrunde Stahlplatte aufgesetzt, die in ihrer Mitte auf einer Messingsäule ruhte, welche in einem Hohlcylinder von Messing genau eingepasst, durch eine Schraubvorrichtung gehoben und gesenkt werden konnte. Die Metallbüchse war in der Mitte eines starken auf drei Fussschrauben ruhenden und regelmässig sechskantigen Bretts befestigt, dessen Rand eine schmale, nach oben über die polirte Fläche der Holzplatte emporspringende Einfassung trug. Um den Apparat vor Zug zu schützen, wurde derselbe durch einen sechskantigen prismatischen Glaskasten eingehüllt.

Zu meinen Experimenten benutzte ich ferner ein gutes Fernrohr, welches auf einem schweren Dreifuss von Eichenholz angeschraubt wurde. Auf diesem befestigte ich auch die Millimeterskala von 1 Meter Länge, genau senkrecht zur optischen Achse.

Bei der für diese Beobachtungen erforderlichen grossen Genauigkeit der Einstellung liesse sich sehr viel Zeit ersparen und dabei eine grössere Sicherheit der Beobachtungsdaten erzielen, wenn Skale und Fernrohr auf einer gemeinsamen Unterlage ruhten, welche eine Längsverschiebung nach einer Richtung und eine Drehung um ein Centrum mittelst Schraube und Kurbel zuliesse.

Die Controlirung der Horizontalität der untersten schwingenden Scheibe geschah theils mittelst der Metallplatte des Hülfsapparats, mit Hülfe der Fussschrauben, theils mittelst eines der unteren Scheibe genäherten Quecksilberniveaus. Ein vorsichtiges Anziehen der Schrauben bei Befestigung der Scheiben genügte, um die Horizontalität zu sichern.

Dass in den Dräthen trotz der angewandten Vorsicht Torsion vorhanden war, erkannte ich daraus, dass der

Apparat beim Eintauchen in Wasser seine Ruhelage änderte. Auf diese Weise erstand meinen Beobachtungen die Mühe der häufigen neuen Einstellungen des Fernrohrs. Um diese zu vermeiden, suchte ich die Torsion später zu beseitigen, hatte aber nicht den Erfolg; es blieb noch Torsion übrig. Daher werde ich in meinen experimentellen Angaben die mit dem I. und II. Drehungsmoment angestellten Beobachtungen der Uebersicht halber trennen, was sonst nicht geboten ist, indem das Drehungsmoment in die Formeln nicht eingeht.

Zur Messung der Schwingungsdauer durfte ich mich eines astronomisch regulirten Chronometers, welcher halbe Sekunden angab, bedienen.

Zu erwähnen ist endlich noch, dass die Genauigkeit der Beobachtungen durch die constanten Erschütterungen des Gebäudes nicht selten beeinträchtigt wurde.

II. Constanten des Apparats.

Die Constanten der Messing- resp. der Glas-Scheibe ergaben sich durch directe Messung:

$r_1 = 99{,}9$ mm $\quad h_1 = 1{,}3$ mm
$r_2 = 75{,}82$ mm $\quad h_2 = 1{,}62$ mm } wo die

Grössen r und h die Radien resp. die Dicke bezeichnen. Ausser diesen Dimensionen theile ich noch folgende mehr oder weniger wichtige mit:

Entfernung der Skale vom Spiegel im Mittel . .	2,9 m
Entfernung der beiden Scheiben von einander . .	60 mm
Innerer Durchmesser des Glasgefässes	208 mm
Höhe des Glasgefässes	59 mm
Durchmesser der Metallplatte	230 mm
Abstand der gegenüberstehenden Seiten des Glaskastens	250 mm
Durchmesser der die Scheibe tragenden Achse . .	6,55 mm

Die Bestimmung des Trägheitsmoments wurde nach der Gauss'schen Methode ausgeführt. Zu diesem Zweck benutzte ich zwei kleine Messingcylinder von fast gleichen Dimensionen, deren Gewicht und Trägheitsmoment bereits ermittelt

worden waren, und hing sie mittelst eines über die Scheibe gelegten Fadens diametral auf, oder ich stellte sie auf dieselben, indem die dabei zu beobachtende Horizontalität der Scheiben mich in den Stand setzte, die fast congruenten Hülfsgewichte symmetrisch und diametral aufzusetzen. Meine endgültige Berechnung des Trägheitsmoments stützt sich auf die paarweise Combination von vier Beobachtungen, um eine genaue Bestimmung zu liefern. Die Gewichte wurden in vier verschiedenen Entfernungen, jedes Mal in der besprochenen Weise, auf die obere Scheibe gestellt. Dadurch wurde das Drehungsmoment D des Apparats um stets dieselbe Grösse vermehrt, und nahm den Werth D^1 an. Bezeichne ich die Summe der Trägheitsmomente beider Gewichte, bezogen auf ihre Achse, mit K^1, das des unbelasteten Apparats mit K, und die Gewichte der beiden Messingcylinder mit G_1 und G_2, so findet die Gleichung statt:

$T^2D^1 = \pi^2 \{K + K^1 + R_1^2 (G_1 + G_2)\}$ wo R_1 den Abstand der Achse der Gewichte von der Drehungsachse bedeutet, und T die Schwingungsdauer bezeichnet. Aus der Combination zweier Beobachtungen (α, β) ergiebt sich der Werth

$$\left.\begin{aligned} D^1_{\alpha\beta} &= \pi^2 (G_1 + G_2)\, \sigma_{\alpha\beta} \text{ wo} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{R^2_\alpha - R^2_\beta}{T^2_\alpha - T^2_\beta}: \end{aligned}\right\} \text{ und } \sigma_{\alpha\beta} \text{ der}$$

Theorie nach für die Combination irgend zweier Beobachtungen den gleichen Werth haben muss.

Die Daten der Hülfsgewichte sind:

	K mgr. mm²	G mm.
I	28236400	149986
II	28175700	149980

Die den Beobachtungen entnommenen Daten sind:

	I	II	III	IV
R mm	53,387	59,65	68,0	80,625
T	28″,107	29″,16	30″,66	33″,128

Hieraus berechnet sich:

$$\left.\begin{aligned} \lg \sigma_{12} &= 1{,}06965 \\ \lg \sigma_{13} &= 1{,}07271 \\ \lg \sigma_{14} &= 1{,}07454 \\ \lg \sigma_{23} &= 1{,}07477 \\ \lg \sigma_{24} &= 1{,}07573 \\ \lg \sigma_{34} &= 1{,}07627 \end{aligned}\right\}$$ woraus als mittlerer Werth $\lg \sigma_{\alpha\beta} = 1{,}07394$ und $\lg D^1 = 7{,}54532$ folgt.

Die weitere Rechnung ergiebt:

	$R^2(G_1 + G_2$	Hinzugefügtes Trägheitsmoment	Berechnetes K mgr. mm^2
I	85497.10^4	911383.10^3	189822.10^4
II	106978.10^4	1126189.10^3	189788.10^4
III	138704.10^4	1443456.10^3	190033.10^4
IV	194990.10^4	2006311.10^3	189681.10^4

Hieraus entnehme ich den gesuchten Werth

$$K = 1898310000 \text{ mgr. mm}^2.$$

Aus der Schwingungsdauer 29″,097 des unbelasteten Apparats ergiebt sich das Drehungsmoment nach der Formel:

$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$; $D_1 = 22157700$ mgr. mm^2 sec^{-2}. Dieses ändert seinen Werth, wenn der Apparat in eine Flüssigkeit getaucht wird, und ist selbst mit der Dichte der Luft in geringem Grade veränderlich; es bedarf aber keiner Kenntniss desselben, da es sich aus den zur Rechnung dienenden Formeln eliminiren lässt. Nachdem ich später die Torsion in dem einen Drath geändert hatte, berechnete ich das neue Drehungsmoment $D_2 = 20074800$.

Endlich sei noch erwähnt, dass jene Genauigkeit beim Aufsetzen der Gewichte dadurch erzielt wurde, dass ein durch ein Gewicht gespannter Drath in der Nähe des Apparats an der Decke befestigt wurde, um die Richtung der Vertikale zu bestimmen. Ein in grösserer Entfernung angebrachtes Fernrohr gestattete den Apparat und Drath gleichzeitig

in deutlicher Sehweite zu haben, und gab mittelst des Fadenkreuzes ein sicheres Mittel, um über die Horizontalität der schwingenden Scheibe zu entscheiden.

C. Theoretisch-experimenteller Theil.

I. Entwickelung der Differentialgleichungen des Problems.

Eine kreisrunde Scheibe schwingt horizontal um ihren Mittelpunkt; es ist die Aufgabe, die Bewegung des durch Reibung mitbewegten Mediums zu ermitteln, unter der Annahme, dass jede andere eigene Bewegung desselben ausgeschlossen ist, und das Medium an der Scheibe haftet. Von den nach beiden Seiten in gleicher Weise erregten Bewegungen betrachten wir etwa die nach unten gerichtete, legen die XZ-Ebene in die untere Fläche der Scheibe und wählen die positive Y-Achse, senkrecht auf dieser nach unten; der Coordinaten-Anfang falle in den Drehpunkt.

Um die stattfindende Bewegung zu übersehen, zerlegen wir die schwingende Masse durch unendliche benachbarte horizontale Ebenen, und die so erhaltenen dünnen Scheiben durch unendlich benachbarte, mit der Drehungsachse concentrische, Cylinderflächen; dann muss die Bewegung so stattfinden, dass jeder nach zwei Dimensionen unendlich dünne Ring seine Lage im Raum nicht ändert, aber wie die Scheibe Schwingungen um sein Centrum ausführt, und zwar werden die concentrischen Ringe einer beliebigen Schicht ihre relative Lage gegen einander ändern, indem sie zu gleichen Zeiten verschiedene Ablenkungen aus der Ruhelage aufweisen müssen. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich in einfacher Weise der analytische Ausdruck für die Bewegung des Mediums, die erhaltene Gleichung gestattet aber keine Integration. Wir sehen uns daher nach einer Bewegungsform um, welche der gegebenen möglichst nahe komme und eine einfache Integration gestatte. Ist die Scheibe unendlich gross, so werden sämmtliche Ringe einer Schicht stets die gleiche Ablenkung zeigen, die Schichten schwingen also

als Ganzes für sich, ohne dass eine relative Verschiebung ihrer Theilchen eintritt. Denken wir uns den Radius sehr gross, so wird das Moment der Reibung, welche der Randring einer beliebigen Schicht seitlich erleidet — wenn ich das schwingende Medium von dem Cylinder begrenzt denke, welcher die untere Scheibe einhüllt — gegen die von der schwingenden Scheibe mittelbar auf alle Ringe der Schicht ausgeübte Reibung nur eine kleine Grösse sein. Als erste Annäherung werden wir annehmen dürfen, dass jede Schicht für sich als Ganzes schwinge und die seitliche Reibung vernachlässige. Wir denken uns also das schwingende Medium als einen Cylinder, welcher gewissermaassen Torsionsschwingungen ausführt, und vernachlässigen die auf den Mantel ausgeübte Reibung: Eine Anschauung, welche nur für eine unendlich grosse Scheibe gerechtfertigt ist. Diese Annäherung wurde der Berechnung des Coulomb'schen Experiments zu Grunde gelegt; sie genügt aber nicht, um genauere Resultate zu geben, sondern muss stets zu grosse Werthe liefern.

Beim Maxwell'schen Experiment würden die unter dieser Approximation berechneten Constanten bedeutend weniger von den wahren Werthen abweichen; Maxwell hat aber eine weitere Näherung in seiner Rechnung eingeführt, ohne indessen die Natur der resultirenden Annäherung näher zu untersuchen. Es wird sich ergeben, dass seine Formeln ebenfalls stets zu grosse Werthe liefern müssen, welche aber den wahren näher liegen als die zuerst abgeleiteten. Eine einfachere Annäherung von entgegengesetzter Wirkung auf das Resultat der Rechnung werden wir als nahe liegend kennen lernen.

Zunächst möge die Bewegungsgleichung unter der ersten Annäherung entwickelt werden, wie sie sich aus allgemeinen Principien sogleich ergiebt. Wir betrachten die Bewegung der von den Ebenen y und y + dy begrenzten Kreisscheiben. Auf die Fläche y wirkt eine positive Kraft, deren Moment bezogen auf die Drehungsachse $-\frac{\pi}{2}R^4\mu\left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_y$ ist, wo μ die Constante der inneren Reibung, $\Theta(y,t)$ den

Winkel der Ablenkung bezeichnet, und die Newton'schen Hypothesen eingeführt sind. Das Moment der auf die Fläche $y + dy$ wirkenden negativen Reibungskraft ist

$$\frac{\pi}{2} R^4 \mu \left(\frac{d^2\Theta}{dt\,dy}\right)_{y+dy}.$$

Die Summe dieser Drehungsmomente giebt das aus der Hypothese abgeleitete Moment der wirkenden Kräfte; diese Kraft müssen wir in der Bewegung wieder finden, oder der aus der Bewegung durch geometrische Anschauung gewonnene Werth für die Kraft (die sogenannte Trägheitskraft) muss dasselbe Drehungsmoment ergeben. Eine Gleichsetzung Beider, wie sie ebenso geboten ist als die Gleichsetzung zweier identischen Grössen, bedeutet in Worten in noch allgemeinerer Fassung: Der Bewegungszustand eines festen, flüssigen oder gasförmigen Körpers ist in jedem Augenblick dadurch gegeben, dass die Summe der Drehungsmomente sämmtlicher wirkenden Kräfte gleich ist dem Drehungsmoment der sogenannten Trägheitskraft, bezogen auf jede beliebige Achse. (Dieser Satz gilt offenbar für gasförmige und compressible Medien nur so lange, als keine Compressionen und Dilatationen eintreten.)

Bezeichne ρ die Dichtigkeit des Mediums, so ergiebt sich die durch $\frac{R^4\pi}{2}\mu$ dividirte Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^3\Theta}{dt\,dy^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{d^2\Theta}{dt^2},$$

welche wir die Reibungsgleichung nennen können. Durch Integration folgt:

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{d\Theta}{dt} = \begin{cases} \psi(y) \\ \text{od. const.} \end{cases}$$

In unserem Fall, wo eine eigene Bewegung der Flüssigkeit ausgeschlossen ist, gestaltet sich die Gleichung einfacher

$$\text{I.} \quad \frac{d^2\Theta}{dy^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{d\Theta}{dt},$$

da unter dieser Voraussetzung Θ kein Glied enthalten kann, das nicht y und t gleichzeitig enthält, und somit constans

gleich Null sein müsste. Weiter darf $\frac{d\Theta}{dt}$ aus demselben Grund kein von y freies Glied enthalten, und nach dem Vorigen folgt, dass $\frac{d^2\Theta}{dy^2}$ kein von t freies Glied enthält; mithin muss auch $\psi(y) = o$ Null sein. Der Gleichung I genügt das, unserem Problem entsprechende Integral

$$\Theta = e^{-(lt + p\eta)} \sin(nt - q\eta^1) \text{ wo } \left.\begin{array}{l} \eta = y + a \\ \eta^1 = y + b \end{array}\right\}$$

II. $p = \sqrt{\frac{1}{2}(-l + \sqrt{n^2+l^2})}\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$

$q = \sqrt{\frac{1}{2}(+l + \sqrt{n^2+l^2})}\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$; geben wir beiden Wurzeln das negative Vorzeichen, so erhalten wir ein zweites Integral, welches wir unter Beibehaltung des positiven Wurzelzeichens auch $\Theta = e^{-(lt - p\eta)} \sin(nt + q\eta^1)$ schreiben können.

Da die Rechnung mit diesen Werthen p und q sich leicht führen lässt, so kommt es darauf an, eine Correction einzuführen unter Beibehaltung jener approximativen Reibungsgleichung I. Diese ergiebt sich sofort, wenn wir die Bewegung des ganzen Systems nach obigem Satz ausdrücken und dabei die Krümmung des Randes vernachlässigen. Wir nehmen also an, dass der Radius der Scheibe so gross sei, dass man die auf den Rand ausgeübte Reibung so berechnen kann, als wäre er geradlinig. Diese Approximation hat Herr Prof. O. E. Meyer bei seiner Berechnung der auf den Scheibenrand ausgeübten Reibung eingeführt und als eine grosse Annäherung bei grossen Scheiben nachgewiesen. Dieselbe Approximation legt Maxwell seiner Näherungsrechnung zu Grunde. Ein weiterer Beweis für die Kleinheit des hierdurch begangenen Fehlers wird sich daraus ergeben, dass bei den benutzten Scheiben die Resultate mit der Grösse des Radius nur sehr wenig variiren und alle Schlüsse, welche unter Vernachlässigung jenes Fehlers im Weiteren gezogen werden, ihre volle Bestätigung finden. Je grösser der

Radius, um so geringer wird der durch Vernachlässigung der Krümmung erzeugte Fehler ausfallen.

Um das Wesen meiner Approximation darzulegen, betrachten wir wieder die von den Ebenen y und $y + dy$ begrenzte Kreisschicht, und fassen zwei sehr benachbarte Theilchen in's Auge, von welchen das eine der unteren Fläche, das andere dem Rande angehört; so ist ersichtlich, dass diese bei geringer Krümmung des Randes und unbegrenztem Medium eine fast gleiche Reibung erfahren werden, oder dass ich berechtigt sein werde $\left(\frac{d^2\Theta}{dtdr}\right)_{R,y}$ durch $\left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_y$ zu ersetzen. Das auf den Rand der Kreisschicht ausgeübte Drehungsmoment ist also $2\pi R^3 \left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_y \mu . dy$.

Bezeichnen wir nun mit H die Grenze, bis zu welcher die Bewegung sich im Medium fortpflanzt, so drückt sich die Bewegung des ganzen Systems analytisch aus:

$$\left.\begin{aligned} &D\Theta_0 + K\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)_0 + 2\int_0^H \frac{R^4\pi}{2}\,\rho\,\frac{d^2\Theta}{dt^2}\,dy \\ &-2R^3h\pi\mu\left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_0 - 2\int_0^H 2R^3\pi\mu\frac{d^2\Theta}{dtdy}\,dy \end{aligned}\right\} = 0$$

wo D und K die frühere Bedeutung haben, und das vierte Glied das auf den Scheibenrand in gleicher Weise berechnete, wirkende Moment der Reibung darstellt. Mit Hülfe der Reibungsgleichung folgt einfacher:

$$\text{III.}\quad D\Theta + K\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)_0 - \pi\mu R^4\left(1 + 2\frac{h}{R}\right)\left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right) + 4\pi R^3\mu\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0 = 0$$

Diese Gleichung enthält gegen die Gleichung der früheren Theorie, welche auch I zu Grunde legt, das Correctionsglied $4\pi R^3\mu\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$; Maxwell führt auch ein Glied $k\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$

ein, welches aber von der Reibung der Dräthe herrühren soll und indem dann k aus der Combination von mehreren verschiedenen Beobachtungen berechnet wird, dazu dient, eine möglichste Uebereinstimmung dieser herbeizuführen, worauf ich später zurückkomme.

Man findet das letzte Glied auch, wenn man direct die Reibung auf den Cylindermantel berechnet und dabei die obigen Näherungen einführt; die Mantelfläche ist $2\pi RH$ und es handelt sich nur um den Mittelwerth von $\left(\frac{d^2\Theta}{dtdr}\right)_R$ oder approximativ von $\left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_y$, der sich längs einer auf dem Mantel gezogenen Graden ergiebt. Dieser Werth ist dargestellt durch $\frac{1}{H}\int_0^H \left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_y dy = -\frac{1}{H}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$ und somit wird das Moment der seitlichen Reibung $-2\pi R^3\mu\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$ für jeden der beiden erregten Cylinder; es ist also $4\pi R^3\mu\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_0$ das Correctionsglied, da die Zeichen in II geändert worden sind. Dieses Glied erschwert die Rechnung wenig.

Wenn ich an der Cylinderform der bewegten Masse und daran festhalte, dass die einzelnen Schichten als Ganzes schwingen, was bei Scheiben von grossem Radius nahezu erfüllt sein muss, so liegt der von meiner Approximation begangene Fehler, neben der Vernachlässigung der Krümmung des Randes, einzig darin, dass die von der Randreibung verursachte Verzögerung der Bewegung der einzelnen Schichten bei der Berechnung des Betrages der Randreibung vernachlässigt worden ist. Meine Theorie bringt also einen zu grossen Betrag von Reibung in Rechnung und muss daher zu kleine Werthe der Reibungsconstanten ergeben. Die alte Theorie bringt zu wenig in Rechnung, muss also zu grosse Werthe liefern, und es ist somit die Möglichkeit zweier Grenzwerthe vorhanden.

Zu erwähnen ist noch, dass die Vernachlässigung der Randkrümmung zu wenig Reibung ergiebt, was sich durch eine leichte Betrachtung ergiebt, während der andere überwiegende Fehler ein Mehr ansetzt; bei der früheren Theorie werden dagegen zwei Fehler in gleichem Sinn begangen.

Die Berechnung meiner Beobachtungen nach Coulomb's Methode giebt das merkwürdige Resultat, dass die nach meinen Formeln berechneten Reibungsconstanten des Wassers und der Luft Beide in gleichem Verhältniss zu den aus der Transpirationsmethode hergeleiteten Constanten (mittlere Werthe) stehen, was bei so verschiedenen Medien zu dem Schlusse zu berechtigen scheint, dass dieses Verhältniss nur eine geometrische Bedeutung habe.

Dieses würde die Bedeutung haben, dass in jedem Medium die Verzögerung der einzelnen Schichten durch die seitliche Reibung zu der ohne diese stattfindenden Bewegung in gleichem Verhältniss stehe, oder aus einem anderen Gesichtspunkt, dass in allen Medien die Abweichung von der Cylinderform der schwingenden Masse die gleiche sei.

Nach Entwicklung der Gleichungen des Problems wende ich mich nun zur Behandlung der einzelnen Probleme, in welche das Ganze zerfällt.

II. Theorie der Bestimmung der inneren Reibung.

Von den gegebenen Gleichungen ausgehend, werde ich die Formeln zur Berechnung der nach Coulomb's und Maxwell's Methode angestellten Beobachtungen entwickeln; ausserdem soll eine andere Versuchsanordnung behandelt werden, welche für das Experiment zwar nicht besonders geeignet, aber zu einer weiteren Prüfung der Theorie dienen kann. Ferner soll auf eine in einem späteren Abschnitt zu behandelnde Methode hingewiesen werden.

Es sei noch bemerkt, dass die Formeln für die Berechnung der inneren Reibung von Flüssigkeiten darum eine Abweichung von den für Gase entwickelten zeigen, weil es rathsam ist, nur die untere Scheibe in der Flüssigkeit schwingen zu lassen und die Gleichungen für Gase, der

kleinen Decremente wegen, eine einfachere approximative Gestaltung meist zulassen.

1. Coulomb's Methode.

a. Entwicklung der Formeln für Gase.

Auf der Achse des Apparats mögen sich zwei Scheiben befinden und Beide horizontale Schwingungen in dem Medium ausführen, dessen innere Reibungsconstante gesucht wird. Die Entfernung der Scheiben, welche wir mit dem Indices 1, 2 bezeichnen, entsprechend der oberen und unteren, sei so gross, dass die beiden, zwischen denselben erregten Bewegungen keine Einwirkung gegenseitig ausüben. Es entstehen somit in dem Medium vier gleichartige Bewegungen oder unter den gemachten Annahmen gesprochen, es werden vier schwingende Cylinder erregt; diese bezeichne ich von oben nach unten in der Folge mit 1 bis 4. Wir betrachten etwa den untersten und suchen die Bewegung näher zu analysiren. Nach dem Gesagten ist diese, für die wirklich stattfindende supponirte Bewegung des liquiden Mediums mit den durch elastische Kräfte bei festen Körpern stattfindenden Torsionsschwingungen verwandt und gestattet eine Uebertragung der Begriffe.

Legen wir die XZ-Ebene in die untere Fläche der unteren Scheibe, die Y-Achse senkrecht nach unten, so erhalten wir die Reibungsgleichung I. In dem vorliegenden Fall, als dem einfachsten, handelt es sich nur um eine ohne Hinderniss fortschreitende Wellenbewegung. Wir können sie einfach darstellen durch $\Theta = e^{-(lt + py)} \sin(nt - qy)$; dann geht die Scheibe ($y = o$) zur Zeit $t = o$ durch die Ruhelade, welche dadurch charakterisirt ist, dass $\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)_o = o$ ist, falls von der Reibung abstrahirt wird.

Man erkennt leicht, dass $T = \frac{\pi}{n}$ die Schwingungsdauer darstellt, und bezeichnet L das dekadisch logarithmische De-

crement, d. i. den Logarithmus zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen zur Grundzahl 10, so ergiebt sich $L = 1T \lg_{10} e$ oder

IV. $l = \frac{\lambda}{T}$, wo $\lambda = \frac{L}{\lg_{10} e}$; und zwar besitzen alle Schichten gleiches Decrement und Schwingungsdauer. Tragen wir diese Werthe in II, S. 13 ein, so folgt:

V.
$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\mu T}\left(-\frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}\right)} \\ q &= \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\mu T}\left(\frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}\right)} \end{aligned}\right\}$$

wo die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens dadurch gehoben ist, dass für $y = +\infty$ die Bewegung Null sein muss, und somit p positiv, also auch q positiv sein muss, weil p und q durch die Relation $2pq = \frac{\rho n}{\mu}$ verbunden sind, wo n seiner Bedeutung nach positiv ist.

Die Bewegungsgleichung des Apparats folgt aus III, S. 14 unmittelbar in der Form:

$$D\Theta_0 + K\frac{d^2\Theta_0}{dt^2} - \pi\mu(a_1 + a_2)\left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_0 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi\mu\frac{d\Theta_0}{dt} = 0$$

VI.
$$\left\{\begin{array}{l} \text{wo } a_1 = R_1^3(R_1 + 2h_1) \;\Big\}\; \varepsilon_1 = 2R_1^3 \;\Big\} \\ \quad\; a_2 = R_2^3(R_2 + 2h_2) \;\Big\}\; \varepsilon_2 = 2R_2^3 \;\Big\} \\ \text{und wir später noch die Bezeichnung} \\ \quad\; a_3 = R_2^3(\tfrac{1}{2}R_2 + 2h_2);\; a_4 = \tfrac{1}{2}R_2^4 \end{array}\right.$$

einführen werden. Diese Gleichung vernachlässigt die Reibung, welche der Spiegel, die Achse und Dräthe erfahren; der dabei begangene Fehler ist bei Anwendung zweier Scheiben von der Grösse der von mir benutzten, und bei dünnen Achsen nur gering; dieses gilt in erhöhtem Grade bei dem Maxwell'schen Versuch. In welchem Grade solche Nebenreibungen die Reibungsconstante afficiren und wie dieser Fehler eliminirt werden kann, wird sich später bei meiner Berechnung der von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer mitgetheilten Beobachtungsdaten ergeben.

Trage ich den Werth Θ in die Bewegungsgleichung ein, so folgt:

VIIa. $2\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (a_1 + a_2)(1 - a\frac{\lambda}{\pi})\, r \sqrt{\mu\rho} = 2\frac{K\lambda}{\pi T}$

wo

VIIb.
$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{q}{p} = \frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2} \\ r &= \sqrt{\frac{\pi}{2T}\left(-\frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{1+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}\right)} \end{aligned}\right\} \text{ gesetzt sind.}$$

Für Gase erhält man die genügend strengen Formeln (bei kleinen Decrementen)

VIIIa.
$$\sqrt{\mu} = -\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}}$$
$$\mathfrak{A} = \frac{a_1 + a_2}{4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}};\quad \mathfrak{B} = \frac{K}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{\lambda}{\pi T}.$$

Wird die Randreibung vernachlässigt, also fällt das Glied mit $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ fort, so folgt die obere Grenze

VIIIb. $\sqrt{\mu} = \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}$. Man erkennt leicht, dass die Gleichung $T = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}$ für Gase mit grosser Annäherung erfüllt ist.

b. Discussion der erhaltenen Formeln.

α. Relative Grösse der Constanten meiner Theorie.

Im Weiteren werde ich von folgender Bezeichnung Gebrauch machen: Ich bezeichne die Reibungsconstanten, welche unter Vernachlässigung der seitlichen Reibung der schwingenden Cylinder berechnet werden (obere Grenze) mit μ_c und μ_m, entsprechend der Coulomb'schen und Maxwell'schen Methode; die nach meiner Theorie berechneten Constanten mit μ_c' und μ_m'. Endlich soll die nach Maxwell's Näherungsmethode berechnete Constante, welche sich als eine nähere obere Grenze ergeben wird, mit μ_m'' bezeichnet werden, und μ_t die durch Transpiration ermittelte Constante bedeuten. Ist dann μ der wahre Werth, so ist

$\mu_m > \mu_m'' > \mu > \mu_m'$, und $\mu_c > \mu > \mu_c'$. Dann folgt aus dem Vorhergehenden $\sqrt{\mu_c} = \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}$; $\mu_c \rho = \frac{8 K^{3/2} D^{1/2} \lambda^2}{\pi^4 . R^8 \left(1 + \frac{2h}{R}\right)^2}$

und dies ist die von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer auf anderem Wege erhaltene Gleichung (Crelle, Bd. 59, S. 274).

Man berechnet $\sqrt{\frac{\mu_c}{\mu_c'}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{64 R \lambda}{\pi^2 \rho R^5 \left(1 + \frac{2h}{R}\right)^2}}\right)$

für Gase; die Abweichung der Werthe μ_c und μ_c' wächst also bei abnehmender Dichte und Radius und bei zunehmendem Decrement. Da aber die Beobachtung lehrt, dass das Decrement viel langsamer wächst als die Dichtigkeit, so folgt, dass der Fehler bei zunehmender Dichtigkeit abnehmen muss, wenn man die innere Reibungsconstante nach der alten Theorie berechnet. Für meine Beobachtungen berechnete ich für Luft $\frac{\mu_c}{\mu_c'} = 2{,}68$, für Wasser 1,53 im Mittel.

β. Coulomb's Gesetz der Proportionalität der Decremente mit den vierten Potenzen der Radien.

Coulomb stellte aus seinen Beobachtungen von schwingenden Scheiben verschiedener Radien den Satz auf, dass das Decrement der Schwingungsbögen proportional der vierten Potenz der Radien wachse. Aus der Formel der alten Theorie kann das Gesetz $\frac{\lambda}{R^4} = \text{const.}$ aber nur folgen, wenn gleichzeitig die Relation $K^{3/2} . D^{1/2} = \text{const.}$ bei der Reihe der verschiedenen Beobachtungen erfüllt ist. Ungefähr dasselbe folgt aus meiner Formel.

c. Formeln zur Bestimmung der inneren Reibung einer Flüssigkeit.

Schwingen beide Scheiben in der Flüssigkeit, so gilt die oben angegebene Gleichung VII. Man wird es aber meist

vorziehen, nur die untere Scheibe in der Flüssigkeit schwingen zu lassen. Schwingt die obere (1) in dem Medium 1, die untere (2) in dem Medium 2, so erhält man zur Berechnung: $\sqrt{\mu_2'} = -\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}}$

$$\mathfrak{A} = \frac{a_2\sqrt{\rho_2}}{4\varepsilon_2}\left(1 - a\,\frac{\lambda}{\pi}\right)r$$

$$\mathfrak{B} = \frac{K\lambda}{\pi T\varepsilon_2} - \frac{a_1\sqrt{\rho_1\mu_1'}}{2\varepsilon_2}\left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right)r$$

$$- \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\mu_1'$$

wo a und r die frühere Bedeutung VIIb haben. Die Grösse μ_2 ergiebt sich hieraus in einfacher Weise.

d. Dimensionen der in der Rechnung auftretenden Constanten in absoluten Maassen.

Skizzire ich die Reibungsgleichung I in absoluten Maassen und bezeichne mit L eine Länge, M eine Masse und T eine Zeiteinheit, so folgt $\mu = \rho L^{+2} T^{-1}$. Die Bewegungsgleichung III ergiebt in gleicher Weise: $D + K T^{-2} + \mu L^3 T^{-1} + L^3 \mu' T^{-1} = o$, also:

$$D = \rho L^5 T^{-2} = M L^{+2} T^{-2}$$

$$K = \rho L^5 = M L^{+2}$$

$$\mu = \rho L^{+2} T^{-1} = M L^{-1} T^{-1}$$

und hierzu tritt später noch die äussere Reibungsconstante σ

$$\sigma = \rho L^{+1} T^{-1} = M L^{-2} T^{-1}.$$

e. Berechnung der inneren Reibungsconstanten von Luft und Wasser aus eigenen Beobachtungen nach Coulomb's Methode.

Ueber die in unbegrenzter Luft ausgeführten Schwingungen des Apparats liegen folgende Beobachtungen und Berechnung vor:

No. d. Exp.	Dat. Aug.	Dreh. Mom.	Temp. C°	L	T
59	16	II.	21,°8	0,0025577	30″,55
63	18		20,°0	0,0024779	
77	20		20,°1	0,0025128	
81	21		22,°0	0,0026323	
11	8	I.	—	0,0024347	29″,09
22	12		—	0,0023834	
52	15		—	0,002546	

No. d. Exp.	μ_c mm. mgr. sec.	μ_c' mm. mgr. sec.	μ_t (mittl. Werth)	$\mu_t : \mu_c'$
59	0,04352	0,01600	0,01855	1,156
63	0,04085	0,01520	0,01844	1,213
77	0,04200	0,01560	0,01844	1,182
81	0,04610	0,01666	0,01855	1,113
11	0,04142	0,01562	—	—
22	0,03969	0,01519	—	—
52	0,04530	0,01669	—	—

Im Mittel ergiebt sich $\frac{\mu_t}{\mu_c'} = 1{,}15$ ca. Bei den Beobachtungen 11, 22, 32 fehlt die Angabe der Temperatur, da sich im Thermometer ein Quecksilberfaden losgelöst hatte und das Datum des Ereignisses nachträglich nicht genau festzustellen war. Fasst man das Verhältniss der Zunahme der Reibung mit der Temperatur in's Auge, so ergiebt sich, dass nicht alle Beobachtungen frei von Beobachtungsfehlern sein können. Nach den Erörterungen über den hohen Grad der Beeinflussung von Einstellungsfehlern bei so kleinen Decrementen und den Bemerkungen über die vorhandenen Schwierigkeiten bei der richtigen Einstellung des Fernrohrs ist eine etwas fehlerhafte Bestimmung der Decremente kaum zu vermeiden; dazu kamen noch die Erschütterungen des

Gebäudes. Ein grösseres Decrement und deshalb auch grössere Genauigkeit wird beim Maxwell'schen Versuch erzielt; ausserdem ergiebt die Rechnung engere Grenzwerthe.

Ueber meine Bestimmung der inneren Reibung des Wassers, welche so ausgeführt wurde, dass die obere Scheibe in der Luft, die untere im Wasser schwang, liegen folgende Daten der Beobachtung und Rechnung vor:

No.	Dat. Aug.	Temp. C°	Dr. M.	L	T
26	12	—	I	0,09143	32″,00
28	13	—		0,09173	
29	13	—		0,09167	
31	13	—		0,09217	
32	14	—		0,09224	
33	14	—		0,09254	
35	14	—		0,09247	
37	14	—		0,09225	
60	16	21°,4	II	0,09480	33″,69
62	18	19°,8		0,09721	

No.	μ_c mm. mgr. sec.	μ_c' mm. mgr. sec.	μ_t (mittl. Werth)	$\mu_t : \mu_c'$
26	1,294	0,850	—	—
28	1,296	0,855	—	—
29	1,296	0,855	—	—
31	1,312	0,861	—	—
32	1,313	0,862	—	—
33	1,326	0,866	—	—
35	1,324	0,865	—	—
37	1,314	0,862	—	—
60	1,326	0,863	1,000	1,158
62	1,403	0,900	1,035	1,15

Hiernach scheint das Verhältniss $\mu_t : \mu_c'$ für Wasser und Luft fast den gleichen Werth zu haben.

f. Berechnung von früheren Beobachtungen des Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer.

Auf Anregung meines hochverehrten Lehrers unternahm ich, zum Zweck der Prüfung meiner Theorie, die Berechnung seiner nach Coulomb's Methode ausgeführten ersten Beobachtungen über schwingende Scheiben, und zwar entnahm ich die Beobachtungsdaten aus Crelle, Bd. 59. In Betreff seines Apparats muss ich hervorheben, dass zum Zweck der Beobachtung des Ausschlagwinkels oben an der Achse eine Scheibe mit Kreistheilung befestigt war; in der Nähe vom unteren Ende befanden sich zwei kleine Scheiben, dazu bestimmt, je eine von den vier Hauptscheiben zwischen sich aufzunehmen und festzuklemmen. Um die Scheiben horizontal zu stellen, war oben an der Achse noch ein dünner, wagerechter Arm mit einem Laufgewicht angebracht. Im Ganzen veranlasste dieser Apparat viele Nebenreibung, welche nicht unmittelbar in Rechnung gezogen werden kann, doch ist der zufallende Betrag wohl zu eliminiren durch die zu dem Zweck von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer beobachteten Schwingungen des Apparats, wenn er nur die obere und die zusammengerückten unteren beiden kleinen Scheiben trug, welche Beobachtungen unter dem Namen »ohne Scheibe« figuriren. Um den Grad der Nebenreibung zu untersuchen, vernachlässigte ich diese zunächst ganz und erhielt durch VIII_a bei alleiniger Berücksichtigung der oberen und der Hauptscheibe, resp. bei dem Experiment »ohne Scheibe« der unteren Doppelscheibe, die in Columne A mitgetheilten Constanten. Bei der Elimination der Nebenreibung suche ich ihre Wirkung auf die obere Scheibe allein zu übertragen. Aus der Beobachtung o. S. habe ich unter alleiniger Berücksichtigung der oberen Scheibe die Reibungsconstante μ_0^1 berechnet. Mache ich nun mit einer Hauptscheibe ein Experiment und unterwerfe dabei die obere Scheibe der Reibungsconstante μ_0^1, die untere dagegen der gesuchten μ^1, so ist die Nebenreibung eliminirt, ich begehe dabei aber den Fehler, die Reibung für den bedeckten Theil der Hauptscheibe um μ^1 zu gross anzusetzen,

da die auf diese Fläche entfallende Reibung bereits in der Constante μ_c' der Bedeutung gemäss enthalten ist. Um den Werth μ_c' genauer zu erhalten, muss ich daher den Betrag der Reibekraft, welcher auf die freien Flächen der kleinen Haltescheiben entfällt, in der Bewegungsgleichung wieder abziehen. Die zur Rechnung dienende Formel ist aus der für n Scheiben in n verschiedenen Medien auf derselben Achse schwingend, verallgemeinerten Gleichung VII_a

$$2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k \varepsilon_k + \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right) r \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\rho_k \mu_k} = \frac{2K\lambda}{\pi T},$$

wo alle Grössen die frühere Bedeutung haben, leicht zu entnehmen. Die in dieser Weise berechneten Constanten enthält die Columne B, während in C die Zahlenwerthe der Reibungsconstante, wie sie aus Transpirationsbeobachtungen von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer gefunden wurden, zur Vergleichung enthalten sind.

Scheibe	A (uncorrig.)	B (μ_c')	C (μ_t)
I	0,0232	0,01783	0,01828
II	—	—	—
III	0,0216	0,01817	0,01826
IV	0,02186	0,02074	0,01832
IV	0,02049	0,01895	0,01852
III	0,02128	0,01736	0,01837
II	0,02291	0,01557	0,01845
I	0,0226	0,01571	0,01837

Diese Tabelle enthält die Berechnung der Experimente in der Reihenfolge, in welcher sie mitgetheilt sind; nur das zweite ist nicht berücksichtigt, da irgend eine Störung von Einfluss gewesen sein muss. Die Rechnung ergab $\mu_0' = 0{,}02549$; und die Durchmesser der Scheiben waren folgende:

I. Glasscheibe . . . . . 51,68 Par. Lin.
II. Kleine Messingscheibe . . 49,57 „ „
III. Grosse Messingscheibe . . 69,79 „ „
IV. Weissblechscheibe . . . 95,31 „ „

Dass in vorstehender Tabelle einige Werthe μ_c' grösser als die den wahren wohl ziemlich nahe liegenden Werthe μ_t ausfallen, kann nicht als schwerer Widerspruch gegen meine theoretische Folgerung $\mu_c' < \mu$ gelten, da diese Ungleichung bei folgenden Versuchen, wo grössere Decremente grössere Genauigkeit des Resultats gewähren müssen, überall wie bei meinen Beobachtungen erfüllt ist.

Herr Prof. Dr. O. E. Meyer hat gleichzeitig Beobachtungen zur Bestimmung der Reibungsconstante des Wassers mitgetheilt und in der Weise ausgeführt, dass die obere Scheibe desselben Apparats in der Luft, die untere im Wasser schwang. Um den Einfluss der Nebenreibung zur Anschauung zu bringen, berechnete ich die Columne A, ohne jene zu berücksichtigen; der Einfluss der Nebenreibung ist leicht zu eliminiren, weil er wesentlich von den Theilen ausserhalb des Wassers herrührt. Zu diesem Zweck berechnete ich die wiederum »ohne Scheibe« ausgeführte Beobachtung so, dass ich die untere kleine Doppelscheibe in der Flüssigkeit der Reibung 1 unterwarf, und aus diesem Experiment die Grösse μ_o' berechnete, welcher die obere Scheibe in der Luft unterworfen sein muss, wenn dann alle Nebenreibung an ihr zum Austrag kommt. Darauf berechnete ich die anderen Beobachtungen so, dass ich die obere Scheibe der Reibung μ_o', die untere der gemischten Reibung μ_c' unterwarf. Die so gefundenen Constanten enthält die Columne B; die Vergleichung von A und B zeigt, dass diese Correctionsmethode genügt. Es war $\mu_o = 0{,}03193$ gefunden worden.

Scheibe	A (uncorr.)	B (μ_c')	μ_t	$\mu_t : \mu_c'$
I	1,0519	1,04	1,1483	1,104
II	1,0328	1,074	1,179	1,097
III	1,0648	1,062	1,185	1,116
IV	1,0941	1,093	1,208	1,106
IV	0,9793	0,9783	1,0688	1,093
III	1,0241	1,022	1,1254	1,101
II	1,1001	1,091	1,187	1,088
I	1,0594	1,051	1,154	1,098
o. S.	1,179	1,000	1,112	1,112

Das Verhältniss $\mu_t : \mu_c'$ erscheint hier beinahe constant gleich 1,10 für alle Scheiben; für meine Beobachtungen fand ich 1,15. Diese Abweichung kann ihren Grund darin haben, dass bei den eben berechneten Experimenten die kleinen Haltescheiben einen nicht in Rechnung gezogenen Einfluss auf die Bewegung der von der Hauptscheibe erregten Cylinder gehabt haben, und dieser nicht zu vernachlässigen war.

2. J. Clerk Maxwell's Methode.

Um die innere Reibung eines Gases zu bestimmen, änderte Maxwell den Coulomb'schen Versuch derartig, dass er auf einer Achse drei Scheiben von gleichen Dimensionen in gleichen Abständen befestigte, diese horizontal schwingenden Scheiben aber durch zwei feste mediär trennte und den beiden äusseren schwingenden in gleicher Entfernung wie den inneren je eine feste Scheibe näherte, sodass im Ganzen sechs Luftcylinder und alle in gleicher Weise erregt wurden.

Um mittelst meines Apparats ohne weitere Vorkehrungen, Beobachtungen nach Maxwell's Methode, behufs Vergleichung der von den Methoden gelieferten Reibungsconstanten vorzunehmen, genügt es, der unteren Scheibe von unten eine horizontale feste Fläche auf kleine Entfernungen zu nähern. Dieses Experiment ist dann eine Combination des Coulomb'- und Maxwell'schen. Im Falle einer Flüssigkeit wird man wieder nur die untere Scheibe in derselben schwingen lassen.

a. Entwicklung der Formeln für Gase.

Die beiden Scheiben schwingen in demselben Medium und erregen vier schwingende Cylinder, welche in ihrer Folge von oben nach unten mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet seien. Die Bewegungsform der ersten drei ist dieselbe wie im vorigen Fall; wir stellen diese Bewegungen dar durch $\Theta_1 = e^{-(lt+py)} \sin(nt - qy)$ und es handelt sich nur noch um die Bewegung Θ_2 des Cylinders 4. Diese muss offenbar so er-

folgen, als werde durch das Haften des Mediums an der genäherten Fläche eine Wellenbewegung von gleichem Decrement und Schwingungsdauer, aber sowohl in horizontaler als verticaler Richtung entgegengesetzt, erzeugt, Θ_2 besteht also aus zwei entgegengesetzten einfachen Wellen von gleichem L und T, aber von verschiedener Amplitude.

Genügen wir der Bedingung des Haftens $\begin{matrix}\Theta_2 = 0 \\ y = b\end{matrix}$ so können wir:

1) $\Theta_2 = e^{-(lt+p(y-b))} \sin(nt-q(y-b)) - e^{-(lt-p(y-b))} \sin(nt+q(y-b))$

setzen, wo dann aber 2) $\Theta_1 = A e^{-(lt+py)} \sin(nt - q(y-B))$ und die Gleichung 3) $\Theta_1 = \Theta_2$ zu erfüllen ist. Die Bewegungsgleichung ergiebt sich unmittelbar in der verbesserten Form: 4) $D(\Theta_1)_0 + K\left(\frac{d^2\Theta_1}{dt^2}\right)_0 - \pi(a_1+a_3)\mu\left(\frac{d^2\Theta_1}{dtdy}\right)_0$

$- \pi a_4 \mu \left(\frac{d^2\Theta_2}{dtdy}\right)_0 + 2\pi\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)_0 = 0.$ Wir haben so zwei Doppelgleichungen 3 und 4, um A, B, D zu eliminiren und μ zu berechnen. Die Rechnung lässt sich nur approximativ durchführen, liefert für Gase aber einfache, genügend genaue Formeln.

Dass meine Theorie für dies Experiment sicher eine untere Grenze der Reibungsconstante ergiebt, wenn dies für das Coulomb'sche Experiment (experimentell erwiesen) der Fall ist, folgt daraus, dass bei dieser Berechnung ein weiterer Fehler im Sinn meiner Theorie begangen wird. Denke ich mir zunächst die genäherte Fläche congruent mit der der schwingenden Scheibe, so pflanzt sich die Bewegung in der Richtung der Y-Achse nur um die Strecke b fort, wo sie bereits Null ist; seitwärts dagegen kann sie sich ungehindert ausbreiten, es ist also sicher $\left(\frac{d^2\Theta}{dtdr}\right)_R < \left(\frac{d^2\Theta}{dtdy}\right)_y$. Setzte ich also bei der Berechnung der Randreibung wieder statt des ersten den zweiten Ausdruck, so setze ich die Reibung nochmals zu gross an, muss also für die Constante zu kleine

Werthe erhalten. Die Fehler der Theorie sind also hier sicher in demselben Sinn begangen, da die wegen der vernachlässigten Randkrümmung entgegengesetzt lautende Ungleichung einen nur geringen Fehler bei grossem Radius ergiebt. Denke ich mir die genäherte Fläche grösser als die Scheibe, so bleiben diese Folgerungen bestehen, der neue Fehler wird nur einen kleineren Werth annehmen.

Man erhält die strenge Gleichung:

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} C - 2a_4 p\mu \left(a + \frac{\lambda}{\pi}\right) \dfrac{\sin 2qb \,.\, e^{-2pb}}{1 + e^{-4pb} - 2\cos 2qb \,.\, e^{-2pb}} \\ \quad - a_4 p\mu \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right) \dfrac{1 - e^{-4pb}}{1 + e^{-4pb} - 2\cos 2qb \,.\, e^{-2pb}} = 0 \\ C = \dfrac{2\lambda K}{\pi T} - 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu - \mu p(a_1 + a_3)\left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right). \end{cases}$$

In dieser Gleichung muss nun noch eine leicht ersichtliche Aenderung eintreten. Bei der Bewegung der Cylinder 1, 2, 3 tritt μ_c', bei der des Cylinders 4 dagegen μ_m' als Constante auf; der Werth von μ_m variirt zwischen dem wahren Werth (für $b = o$) μ und μ_c' (für $b = \infty$). Aus dem Experiment soll μ_m' berechnet werden; in der Gleichung ist daher eine Aenderung vorzunehmen, um diese berechnete Constante nicht durch den abweichenden Werth μ_c', welcher den Cylindern 1, 2, 3 zukommt, zu beeinflussen. Mit genügender Approximation für Gase erhält man

$$b\left\{\frac{2\lambda K}{\pi T} - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu_c' - \varepsilon_2\mu_m' - (a_1 + a_3)\sqrt{\mu_c'}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}}\right\} - \mu_m' a_4 = o,$$

und hieraus:

$$\text{X.}\quad \mu_m' = \frac{b}{a_4 + b\varepsilon_2}\left\{\frac{2\lambda K}{\pi T} - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu_c' - (a_1 + a_3)\sqrt{\mu_c'}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}}\right\}$$

Zur Rechnung muss also μ_c' vorher experimentell bestimmt werden nach VIII_a, was leicht zu erreichen ist, da eine annähernde Bestimmung genügt; annähernd kann man nach dem Vorangehenden $\mu_c' = \frac{1}{1{,}10}\mu_m'$ setzen, und kann sich

damit begnügen, da die von den oberen 3 Cylindern herrührende Reibung nur eine kleine Grösse gegen die des begrenzten Cylinders ist.

Wird die seitliche Reibung der schwingenden Cylinder vernachlässigt, so erhält man, wie sofort folgt:

XI. $\mu_m = \frac{b}{a_4}\left(\frac{2\lambda K}{\pi T} - (a_1 + a_3)\sqrt{\mu_c}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}}\right)$ und hat hiermit eine obere Grenze. Eine nähere obere Grenze ergiebt die Näherungsrechnung, welche Maxwell eingeschlagen hat.

Seine Berechnung würde für dies Experiment:

XIIa. $\mu_m'' = \frac{b}{a_4\left(1 + \frac{4\alpha}{R_2}\right)}\left(\frac{2\lambda K}{\pi T} - (a_1 + a_4)\sqrt{\mu_c}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}}\right)$

ergeben, wo

XIIb. $\alpha = \frac{2b + h_2}{\pi} \lg_e 10 \left(\lg_{10} 2 + \lg_{10} \sin \frac{\pi b}{2b + h}\right)$

und R_2 der Radius der unteren Scheibe ist, b die Höhe des Cylinders 4 und h_2 die Dicke der untersten Scheibe.

Dass diese Grenze eine obere, soll später bei dem reinen Maxwell'schen Experiment, für welches die Näherung eingeführt worden, dargethan werden.

b. Discussion der Formeln.

α. Grenze für die Fortpflanzung der Bewegung.

Für eine gewisse Entfernung b^0 wird der Einfluss der genäherten Scheibe nicht mehr merklich werden, es ist dann die Grenze erreicht, bis zu welcher die Bewegung sich merklich fortpflanzt. Charakterisirt ist dieser Uebergang des behandelten Experiments in das Coulomb'sche dadurch, dass das vorher beobachtete Decrement L^0 des in unbegrenzter Luft schwebenden Apparats wieder auftritt und dass keine weitere Abnahme desselben stattfindet. In den Gleichungen X, XI, XII gehen dann b in b^0, λ in λ^0, μ_m' in μ_c', μ_m in μ_c über, T behält seinen Werth, da es nahezu constant erscheint bei Veränderung der Entfernung. Aus

diesen Gleichungen kann man daher zwei Grenzwerthe für b^0 ableiten; die Theorie, welche zu wenig Reibung ansetzt, muss eine obere Grenze b^0 (XI), diejenige, welche den entgegengesetzten Fehler begeht, eine untere Grenze b'^0 (X) liefern. Bezeichnet (b^0) momentan den wahren Werth, so muss also $b^0 > (b^0) > b'^0$ sein. In dieser Weise berechne ich, entsprechend den beiden Drehungsmomenten, die Ungleichungen:

$$27{,}6 > (b^0) > 18{,}2 \text{ mm}$$
$$24{,}7 > (b^0) > 17{,}1 \text{ mm}.$$

Da der wahre Grenzwerth näher an der unteren Grenze liegen muss, wegen der grösseren Annäherung meiner Theorie, so dürfen wir diese Grenze ungefähr $b^0 = 20{,}0$ mm setzen. Dieser Werth stimmt ziemlich gut mit dem von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer experimentell bestimmten überein (Pogg. Ann. Bd. 125). Er bestimmte ihn derartig, dass er die gegenseitige Entfernung mehrerer auf einer Achse befestigten Scheiben alternirte; bei einer Entfernung zwischen 30 und 35 mm. trat dabei keine merkliche Aenderung des Decrements ein; hiernach würde b^0 zwischen 15 und 17 mm. liegen, doch ist dieses Resultat nicht ganz sicher. Demnach würde b^0 der unteren Grenze, wie sie aus meiner Theorie folgt, noch näher liegen; in Wirklichkeit wird b^0 auch von den Constanten des Apparats nicht ganz unabhängig sein.

Für flüssige Medien gestatten die Gleichungen im Allgemeinen keine Reihenentwicklung; die Berechnung der Grenze b^0 ist dann ziemlich umständlich, wie bei der Herleitung dieser Grösse für Wasser später ersichtlich ist.

Wir wissen, dass μ'_m zwischen μ und μ'_c variirt; nehme ich an, dass die Abnahme des berechneten μ'_m proportional der wachsenden Entfernung sei, so dass also:

$\mu'_m = \mu\left(1 - \frac{b}{b^0}\left(1 - \frac{\mu'_c}{\mu}\right)\right)$, so folgt $\mu = \frac{\mu'_m b^0 - \mu'_c b}{b^0 - b}$

und für meine Beobachtungen $\mu = \frac{\mu'_m}{1 - 0{,}0065\, b}$, wenn

$\frac{\mu'_c}{\mu} = \frac{1}{1{,}15}$ gesetzt wird.

β. Relative Grösse der aus meinen Formeln berechneten Constanten.

Da für b = o die Werthe μ_m und μ'_m den wahren Werth μ annehmen müssen, so muss die Gleichung erfüllt sein $\left(\frac{\mu_m}{\mu'_m}\right)_{b=o} = 1$ Nun ist den Gleichungen X und XI zufolge $\frac{\mu_m}{\mu'_m} = \frac{a_4 + b\varepsilon_2}{a_4} \frac{\frac{2\lambda K}{\pi T} - A}{\frac{2\lambda K}{\pi T} - A^1}$, wo die Bedeutung von A und A^1 ersichtlich ist. Diese Grössen sind von b unabhängig, und zwar ergab sich für meine Beobachtungen, den beiden Drehungsmomenten entsprechend:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 208620 \\ A_2 &= 203570 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} A'_1 &= 205780 \\ A'_2 &= 202690 \end{aligned}\right\}$$

Diese Zahlenwerthe zeigen, dass die geforderte Gleichheit $A = A^1$ mit ziemlicher Annäherung erfüllt ist; die geringe Abweichung ist durch die nicht genügend sichere Bestimmung von μ'_c und μ_c, welche in A eingehen, genügend erklärt. Um der Gleichung zu genügen, setzen wir $\begin{matrix} A_1 = A'_1 = 207200. \\ A_2 = A'_2 = 203130 \end{matrix}$

Dann wird $\frac{\mu_m}{\mu'_m} = 1 + \frac{b\varepsilon_2}{a_4} = 1 + 0{,}0527\,b$, und hieraus folgt mit Hülfe der Gleichung $\mu = \mu'_m \cdot \frac{1}{1 - 0{,}0065\,b}$

$$\left.\mu = \mu_m \frac{1}{1 + 0{,}0462\,b}\right\}$$

Da $\frac{b\varepsilon_2}{a_4}$ für $r = \infty$ verschwindet, so sieht man, wie die Werthe μ_m und μ'_m dann in einander übergehen, wie es sein muss. Das Verhältniss von $\mu_m : \mu'_m$ erkennt man als vom Medium unabhängig und zwar lediglich geometrischer Natur. Man sieht ferner, dass die Werthe μ_m viel stärker von den wahren Werthen divergiren, als die aus meiner Theorie folgenden Constanten.

c. Formeln zur Berechnung des reinen Maxwell'schen Experiments.

Dächten wir uns die obere Scheibe im luftleeren Raum schwingend und die untere nach oben ebenfalls keiner Reibung ausgesetzt, den Reibungseffect also lediglich durch den schwingenden Cylinder 4 hervorgerufen, so würde das vorige Experiment in das von Maxwell angestellte dem Sinn nach übergehen. Denke ich mir ferner statt der einen Fläche etwa N Scheibenflächen von gleichem Radius mit der Achse in gleicher Weise verbunden und derselben Reibung wie die untere Fläche der unteren Scheibe ausgesetzt, so wird der Effect der Reibung offenbar N mal so gross sein, die Formeln geben dann $N\mu$. Maxwell führte, wie gesagt, seinen Versuch derartig aus, dass jeder schwingenden Scheibe von beiden Seiten in gleichen Entfernungen eine feste Scheibe genähert war. Aus X und XI ergeben sich hieraus die Formeln zur Berechnung des Maxwell'schen Experiments hinreichend genau für Gase:

XIIIa. $$\mu'_m = \frac{2b}{NR^4\left(1+\frac{4b}{R}\right)}\left\{\frac{2\lambda K}{\pi T} - NR^3 h \sqrt{\mu'_c}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}}\right\}$$

XIIIb. $$\mu_m = \frac{2b}{NR^4}\left\{\frac{2\lambda K}{\pi T} - NR^3 h \sqrt{\mu_c}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2T}}\right\}$$ wo R der Radius der schwingenden Scheiben, N die Anzahl der schwingenden Scheiben-Flächen, h die Dicke der Scheiben.

Es ist $\mu'_m < \mu < \mu_m$ und zwar liegt der wahre Werth der unteren Grenze viel näher. Um μ'_m zu berechnen, muss μ'_c bekannt sein, wozu die Kenntniss des Decrements des in dem unbegrenzten Medium schwingenden Apparats genügt. Kennt man dieses nicht, so genügt es für kleine Entfernungen μ'_c durch μ'_m oder noch genauer durch $\frac{\mu'_m}{1{,}10}$ nach dem Früheren zu ersetzen. Für Gase und kleine Decremente findet man hinreichend genau:

XIV. $\sqrt{\mu_m'} = -\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{B}}$; $\mathfrak{A} = \dfrac{b\,h\,\sqrt{\dfrac{\rho\pi}{2T}}}{R\left(1+\dfrac{4b}{R}\right)\sqrt{1{,}10}}$;

$$\mathfrak{B} = \frac{4\,b\,\eta K}{N\pi T R^4\left(1+\dfrac{4b}{R}\right)};$$

XIIIb stellt den Werth μ dar, wie er sich aus der ersten Näherung ergiebt. Maxwell giebt, wie angeführt, gleichfalls eine zweite Näherung, indem er die seitliche Reibung des Cylinders berechnet. Dabei vernachlässigt er zunächst auch die Krümmung des Scheibenrandes wie ich; dann aber weicht seine Rechnung ab und zwar müssen seine Formeln immer zu grosse Werthe liefern, wie leicht einzusehen. In der Gleichung, welche die Bewegung des gradlinig hin- und herschwingenden Mediums darstellt, setzt Maxwell, wie er zeigt, mit grosser Annäherung das Glied, welches die Trägheitskraft darstellt, was also in die Dichte multiplizirt ist, gleich Null, und berechnet unter dieser Näherung die Reibung, welche die schwingende Masse seitlich erfährt. Aus diesem Betrage berechnet er sodann, um wieviel der Radius der Scheibe vergrössert werden müsste, um einen gleichen Mehrbetrag von Reibung zu erzielen. Denke ich mir nun zwei Medien mit gleichen Reibungsconstanten, aber von ungleicher Dichtigkeit, so ist es klar, dass der Betrag der Reibungskräfte in dem dichteren Medium grösser sein wird — man findet sie proportional $\sqrt{\rho\mu}$, denn die Reibekraft ist proportional $\mu\,\dfrac{d^2\Theta}{dt\,dy}$; der letzte Factor aber enthält q als Factor und dieser wiederum $\sqrt{\dfrac{\rho}{\mu}}$, daher ist die Reibekraft proportional $\sqrt{\rho\mu}$ —; wenn also Maxwell die Dichtigkeit geringer ansetzt, indem er sie Null setzt, so muss der berechnete Reibungsbetrag zu klein ausfallen; folglich muss die berechnete Reibungs-Constante seiner Theorie μ_m'' eine obere Grenze sein, und zwar $< \mu_m$, da jene eine zweite Näherung darstellt. Hierbei wird wieder

vorausgesetzt, dass der Radius der Scheibe gross genug sei, um die Krümmung des Randes ohne merklichen Fehler vernachlässigen zu dürfen. Die von Maxwell abgeleitete Gleichung lautet in meiner Bezeichnung für Gase genügend approximativ:

XV.
$$\mu''_m = \frac{4 K b \lambda}{N \pi T R^4 \left(1 + \frac{4\alpha}{R}\right)};$$
$$\alpha = \frac{2b+h}{\pi} \lg_e 10 \left(\lg_{10} 2 + \lg_{10} \sin \frac{\pi b}{2b+h}\right).$$

Seine Formel enthält eigentlich statt λ den Factor $\lambda - \varepsilon$, wo ε der Theil des Decrements sein soll, welcher der Reibung der Achsen, Dräthe u. s. w. zuzuschreiben ist, und zwar berechnete er die Grösse ε aus der Beobachtung derart, dass die bei verschiedener Versuchsanordnung gefundenen Constanten möglichst übereinstimmten. Da aber bei Variation der Entfernung die berechnete Constante μ''_m, da sie nur eine Approximation ist, veränderlich ist und zwar bei wachsender Entfernung zunehmen muss, so wird die Berechnung von ε illusorisch. Ausserdem fällt bei kleinen Entfernungen die Reibung der Scheibe an den begrenzten Luftschichten so gross aus, dass die Nebenreibung kaum Einfluss haben kann. Aus diesem Grunde unterdrückt Puluj (Carl's Repertor. Bd. 13) wohl bei seiner Mittheilung der Maxwell'schen Formel diese Grösse ε. Es ist $\mu'_m < \mu < \mu''_m$, und aus dem Experiment scheint hervorzugehen, dass die wahre Constante der unteren Grenze näher liegt, wie später gezeigt werden soll.

d. Modification der Formeln für Flüssigkeiten.

Schwingt die obere Scheibe in dem gasförmigen Medium 1, die untere in der Flüssigkeit 2, so treten unter den vier schwingenden Cylindern drei verschiedene Bewegungen auf; die beiden oberen involviren die Reibungsconstante μ'_{1c}, der dritte die Constante μ'_{2c}, der unterste endlich μ'_{2m}, wo die

Bezeichnung ersichtlich ist. — Man erhält die strenge Gleichung:

$$o = c\,(e^{2pb} + e^{-2pb} - 2\cos 2qb) - 2a_4\left(a + \frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{\rho_2 \mu} \sin 2qb$$

XVIa.

$$- a_4\left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{\rho_2 \mu}\,(e^{2pb} - e^{-2pb})$$

wo r und a die Bedeutung haben VIIb; p und q die Grössen ρ_2 und μ'_{2m} resp. μ_{2m} involviren (und diese Bedeutung der Grösse μ in XVIa zukommt), je nachdem c den Werth

XVIb.

$$c = \frac{2\lambda K}{\pi T} - (2\varepsilon_1 \mu'_{1c} + \varepsilon_2 \mu'_{2c} + \varepsilon_2 \mu'_{2m}) - (a_1 \sqrt{\mu'_{1c} \rho_1} + a_3 \sqrt{\mu'_{2c} \rho_2}) \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right) r \text{ oder}$$

XVIc.

$$c = \frac{2\lambda K}{\pi T} - (a_1 \sqrt{\mu_{1c} \rho_1} + a_3 \sqrt{\mu_{2c} \rho_2}) \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right) r$$

annimmt, wo dann $\mu'_{2m} < \mu_2 < \mu_{2m}$.

Es ist leicht, aus diesen Gleichungen diejenigen für das reine Maxwell'sche Experiment in dem früheren Sinn herzuleiten. Da bei der Schwingung in Flüssigkeiten auch bei kleinen Entfernungen b die Grössen $2pb$ und $2qb$, welche reine Zahlengrössen sind, > 1 ausfallen, so wird es zur Rechnung geboten sein, die Reihenentwicklung in anderer Weise vorzunehmen. Hat man eine ungefähre Kenntniss des Werthes μ_2, so bestimme man eine Grösse γ so, dass

$$\left.\begin{aligned} 2pb &= \gamma - \delta_1 \\ 2qb &= \gamma - \delta_2 \end{aligned}\right\}$$ wo δ_1 und δ_2 kleine echte Brüche sind,

was bei kleinen Entfernungen möglich ist, da $\frac{q}{p} = a$ von 1 wenig abweicht. Eine Reihenentwicklung nach Potenzen von δ und $a\,\delta$ führt dann zu den Formeln des Problems, in welche etwa $k_1 = \cos \gamma a$, $k_2 = \sin \gamma a$, $k_3 = e^{-2\gamma}$ als Constante eingehen. Die Durchführung der Rechnung bietet keine Schwierigkeit. Es ist ersichtlich, dass obige Gleichungen wieder zwei Grenzen für die gesuchte Constante darstellen.

e. Berechnung von Puluj's nach Maxwell's Methode angestellten Beobachtungen.

Um die Bedeutung der Grenzwerthe und die Divergenz der Werthe μ'_m und μ''_m zu untersuchen, also die Ungleichung $\mu'_m < \mu < \mu''_m$ experimentell zu demonstriren, berechnete ich zunächst die Beobachtungen, welche Puluj nach Maxwell's Methode ausgeführt hat und im 13. Band von Carl's Repertorium mittheilt. Da der Beobachter besonders das Gesetz der Abhängigkeit der Reibungsconstante von der Temperatur, den sogenannten Exponenten der absoluten Temperatur auffinden will, und da die Maxwell'sche Formel lehrt, dass bei gleichbleibender Entfernung und unveränderter Schwingungsdauer (welche mit der Reibung nur sehr wenig veränderlich ist) der innere Reibungscoëfficient dem Decrement proportional ist, so genügt die Kenntniss der bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Decremente. Er machte 49 Beobachtungen über die Schwingung in der Luft und führte noch zwei weitere Versuchsreihen mit Kohlensäure und Wasser aus. Zuvor machte er noch einige Vorversuche und berechnete diese nach XV. Die Berechnung dieser Versuche nach meiner Gleichung XIV theile ich im Folgenden mit, und füge den von Puluj berechneten Werth in Klammer hinzu.

Luft		Kohlensäure	Wasserstoff
0,01793	0,01828	0,014845	0,008902
(0,01916)	(0,01917)	(0,01528)	(0,00923)
19°,5 C.	20°,0 C.	19°,9 C.	15°,83 C.
b = 2,6685 mm.	1,834 mm.	1,834 mm.	1,834 mm.
Arithm. Mittel	Ar. Mittel	Ar. Mittel	Ar. Mittel
0,01854	0,01872	0,01506	0,009066

Den theoretischen Erörterungen gemäss müssen die Ungleichungen gelten:

$$\left.\begin{array}{lll} 0{,}01793 < \mu_1 < 0{,}01916 & \text{Luft} & 19°{,}5\ \text{C.} \\ 0{,}01828 < \mu_1 < 0{,}01917 & \text{„} & 20°{,}0\ \text{C.} \\ 0{,}014845 < \mu_2 < 0{,}01528 & \text{Kohlensäure} & 19°{,}9\ \text{C.} \\ 0{,}008902 < \mu_3 < 0{,}00923 & \text{Wasserstoff} & 15°{,}8\ \text{C.} \end{array}\right\}$$

Da für Gase die Grösse $\mathfrak{A}$ in XIV gegen B sehr klein ist, so folgt aus meiner Formel fast genau derselbe Exponent der absoluten Temperatur wie aus XV. Stütze ich mich daher auf die von Puluj durchgeführte Berechnung der Versuchsreihe, so ergiebt die Methode der kleinsten Quadrate:

$$\left.\begin{aligned} \mu_m' &= 0{,}017259\ (1 + 0{,}002649\ \vartheta) \\ \mu_m'' &= 0{,}018174\ (1 + 0{,}002649\ \vartheta) \end{aligned}\right\}$$

Zur Vergleichung stelle ich hier noch einige durch Transpiration ermittelte Constanten zusammen:

Herr Prof. Dr. O. E. Meyer	0,0170	(1 + 0,0028 ϑ)
	0,0171	(1 + 0,0024 ϑ)
	0,0174	(1 + 0,003 ϑ)
v. Obermayer	0,01678	(1 + 0,0027 ϑ)
	0,0168	(1 + 0,0027 ϑ)
	0,0171	(1 + 0,0027 ϑ)
Puluj	0,0179	(1 + 0,0024 ϑ)
	0,0180	(1 + 0,0021 ϑ)
	0,0181	(1 + 0,0022 ϑ)

f. Berechnung der von Kundt und Warburg nach Maxwell's Methode ausgeführten Beobachtungen.

Diese bedeutenden Physiker machten es sich zur Aufgabe, den Nachweis der Unabhängigkeit der inneren Reibung vom Druck für kleine Drucke nachzuweisen, und legten ihre Untersuchung in Pogg. Ann., Bd. 155 nieder. Zunächst untersuchten sie die innere Reibung von Luft, Kohlensäure und Wasserstoff bei 750 mm. Druck, nach Maxwell's Methode mittelst einer aequidistant, zwischen zwei festen Scheiben schwingenden Scheibe. Drei verschiedene Entfernungen lieferten drei getrennte Versuchsreihen, und zwar stimmen die beiden letzteren sonst in allen Stücken überein. Berechnet habe ich die diesen letzteren entnommenen Experimente und sah von der ersten Reihe ab, weil diese für alle Gase eine nicht aufgeklärte Abweichung zeigt. Die beiden Anordnungen unterscheide ich durch II und III; die

Reibungsconstanten μ_m^1 nach meiner Theorie berechnet, theile ich wiederum in mm., mgr., sec. mit, füge $\mu_m^{1,1}$ in Klammer hinzu, sowie das arithmetische Mittel aus beiden und die Beobachtungstemperatur.

Luft		Wasserstoff		
II	III	II	III	
0,017822	0,017678	0,008768	0,008718	0,008605
(0,018682)	(0,018898)	(0,0091658)	(0,009284)	(0,009164)
0,018252	0,018288	0,0089674	0,0090012	0,008885
18°,8 C.	15°,0 C.	19°,1 C.	19°,0 C.	13°,6 C.

Kohlensäure		
II		III
0,014455	0,01427	0,01439
(0,015181)	(0,01499)	(0,015425)
0,014818	0,01463	0,014907
20°,0 C.	16°,6 C.	18°,5 C.

Construire ich die aus theoretischen Gründen sich ergebenden Ungleichungen, combinire diese mit den aus Puluj's Beobachtungen hergeleiteten und bezeichne die wirklichen Werthe der Constanten mit μ_1, μ_2, μ_3, so erhalte ich für

Luft

0,01828 $<\mu_1<$	0,01917	P.	20°,0 C.
0,01793	0,01916	P.	19°,5 C.
0,01782	0,018682	K. u. W.	18°,8 C.
0,017678.	0,018898	K. u. W.	15°,0 C.

Kohlensäure

0,014455 $<\mu_2<$	0,015181	K. u. W.	20°,0 C.
0,014845.	0,01528	P.	19°,9 C.
0,01439	0,015425	K. u. W.	18°,5 C.
0,01427	0,01499	K. u. W.	16°,6 C.

Wasserstoff

0,008769 $<\mu_3<$	0,0091658	K. u. W.	19°,1 C.
0,0087185.	0,009284	K. u. W.	19°,0 C.
0,008902	0,00923	P.	15°,83 C.
0,0086055.	0,0091636	K. u. W.	13°,6 C.

Um zu zeigen, wie die Engheit der Grenzen mit abnehmender Entfernung wächst, stelle ich in Folgendem die diesen zwölf Ungleichungen in derselben Folge entsprechenden Entfernungen b mit den Quotienten $\frac{\mu''_m}{\mu'_m}$ zusammen:

Luft		Kohlensäure		Wasserstoff	
b	$\frac{\mu''_m}{\mu'_m}$	b	$\mu''_m : \mu'_m$	b	$\mu''_m : \mu'_m$
1,834	1,048	1,967	1,050	1,967	1,045
2,6685	1,068	1,834	1,029	2,802	1,065
1,967	1,048	2,802	1,072	1,834	1,037
2,802	1,069	1,967	1,050	2,802	1,065

Anschaulicher stelle ich die Werthe $\mu''_m : \mu'_m$ im Folgenden zusammen:

b	Kohlensäure	Luft	Wasserstoff
2,802	1,072	1,069	1,065 1,065
2,668	—	1,068	—
1,967	1,050 1,050	1,048	1,045
1,834	1,029	1,048	1,037

Diese Zahlen zeigen, wie die Genauigkeit der Bestimmung der Constante mit abnehmender Entfernung wächst; sie zeigen ferner, dass die Grösse des Radius bei genügend grossen Scheiben nur wenig Einfluss haben kann, und dass die Engheit der Grenzen mit abnehmender Dichtigkeit zunimmt — wenn man von den Beobachtungen wo b = 1,834 absieht, die offenbar etwas abweichen. Um die Reibungsconstante möglichst genau zu bestimmen, wird man also die Scheibe nicht grösser wählen als die benutzten, sondern die Entfernung möglichst klein machen. Um dies zu ermöglichen, muss das Drehungsmoment des Apparats möglichst gross gewählt werden, und dies kann durch eine ausserhalb der eingrenzenden Scheiben an der Achse befestigte dicke schwere Scheibe von nicht zu grossem Radius leicht erreicht werden.

Es lässt sich der Schluss ziehen (allerdings nicht mit grosser Sicherheit, da zu wenig Material hier vorliegt), dass die von meiner Theorie gelieferten Werthe den wahren näher liegen; man erkennt dies unter Anderem daran, dass die Mittelwerthe in ihrer Zusammenstellung das Gesetz der Zunahme mit der Temperatur nicht darstellen. Fasse ich beispielsweise die beiden berechneten Beobachtungen für Luft von Kundt und Warburg in's Auge. Die Scheibe beim Abstand 1,967 mm. ergab den Mittelwerth 0,01825 bei 18°,8 C.; dieselbe ergab beim Abstand 2,802 bei 15° C. den Mittelwerth 0,01829. Bei wachsendem b wächst μ'_m, dagegen nimmt μ'_m ab, wie theoretisch begründet wurde. Der Werth von μ'_m ist also in so viel höherem Grade gewachsen, als der Werth μ'_m abgenommen hat, dass der Mittelwerth nicht die verlangte Abnahme, sondern eine Zunahme aufweist. Da also μ'_m mit der Entfernung weniger veränderlich erscheint und beide für b = o den gleichen Werth μ annehmen — mathematisch ist dieses gerechtfertigt —, so folgt, dass die Werthe μ'_m den wahren näher liegen. (Es scheint, als sei die Entfernung b = 1,834 nicht ganz so genau, wie die anderen gemessen worden.)

3. Eine weitere Modification der Coulomb'schen Methode.

Man kann das Coulomb'sche Experiment auch in der Weise abändern, dass man auf einer Achse in der früheren Weise zwei Scheiben anbringt, und ihre Entfernung von o bis zu dem Werth, wo das Decrement constant erscheint, variirt. Zur Bestimmung der Reibungsconstante ist dies Experiment ungünstig, es kann aber zu einer weiteren Prüfung der Theorie dienen, indem sich leicht zu verificirende Resultate ergeben.

Wenn wir die Scheiben auf kleinen Abstand genähert haben, so behandeln wir die beiden schwingenden Cylinder 2, 3, welche zwischen den Scheiben liegen, als einen einzigen; diese Bewegung setzt sich aus zwei horizontal gleich, aber vertikal entgegengesetzt gerichteten Bewegungen zusammen

und ist offenbar dadurch bestimmt, dass $\Theta_2 (y) = \Theta_2 (b - y)$ sein muss, wenn wir zur XZ-Ebene die innere Fläche einer Scheibe und die Y-Achse senkrecht darauf, positiv gegen die andere Scheibe gerichtet, wählen. Ich stelle diese Bewegung dementsprechend durch:

$\Theta_2 = e^{-(lt + py)} \sin(nt - qy) + e^{-(lt - p(y-b))} \sin(nt + q(y - b))$ dar; dann haben die Cylinder 1 und 4 die Form:

$\Theta_1 = \Theta_4 = A e^{-(lt + py)} \sin(nt - q(y + B))$ und es ist der Bedingung $\Theta_{1\,y=o} = \Theta_{2\,y=o}$ zu genügen. Die Bewegungsgleichung des Apparats hat folgenden Ausdruck:

$$D\Theta_0 + K\left(\frac{d^2\Theta_1}{dt^2}\right)_o - \pi\mu(a_5 + a_6)\left(\frac{d^2\Theta_1}{dt\,dy}\right)_o - \pi\mu a_5\left(\frac{d^2\Theta_2}{dt\,dy}\right)_o + \pi\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)_o = o,$$

wo $\left.\begin{aligned} a_5 &= \tfrac{1}{2}(R_1^4 + R_2^4) \\ a_6 &= 2(R_1^3 h_1 + R_2^3 h_2) \end{aligned}\right\}$ und alle anderen Grössen die frühere Bedeutung haben. Diese Gleichung enthält den Betrag der seitlichen Reibung des Cylinders Θ_2 nicht, da derselbe sich nicht einfach berechnen lässt. Für grosse Entfernungen wird man statt ε_1 und ε_2 die doppelten Grössen zu setzen haben; die Correction für kleine Entfernungen wird sich später ergeben. Aus den zwei Doppelgleichungen werden A, B. D eliminirt, und man erhält streng:

XVII.
$$\frac{2\lambda K}{\pi T} - \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (a_7 + a_8)\left(1 - a\frac{\lambda}{\mu}\right)\sqrt{\rho\mu}\, r + a_7 r\sqrt{\rho\mu}\,\frac{2\left(a + \frac{\lambda}{\pi}\right)e^{-pb}\sin qb - \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right)(1 - e^{-2pb})}{1 + 2e^{-pb}\cos qb + e^{-2pb}} = o.$$

Für Gase und kleine Entfernungen verschwindet das letzte Glied, die Gleichung gewinnt dann die einfachere Gestalt:

$$\frac{2\lambda K}{\pi T} - \mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (a_7 + a_8)\sqrt{\mu\rho}\sqrt{\frac{\pi}{2T}} = o.$$

Vergleicht man diese mit VIIa, so ergiebt sich Folgendes:

Zwischen zwei sehr nahen auf derselben Achse schwingenden Scheiben findet keine relative Bewegung des Mediums statt; sondern dieses hat durchweg gleiche Winkelgeschwindigkeit mit der Scheibe. Für kleine Entfernungen wird man also die seitliche Reibung des Zwischencylinders dadurch in Rechnung ziehen, dass man die Grösse $-2bR^3\pi\mu\left(\frac{d^2\Theta_1}{dtdy}\right)_0$ zur aufgestellten Bewegungsgleichung hinzufügt; wird die Entfernung etwas grösser, so ist der begangene Fehler im Sinn meiner Näherung.

4. Methode zur Bestimmung der Reibung von schweren und zähen Flüssigkeiten.

Schwere und zähe Flüssigkeiten gestatten wegen des Gewichtsverlustes der in sie eingetauchten Scheibe und wegen des grossen Betrages der Reibung die Bestimmung der inneren Reibungsconstante nicht nach der behandelten Methode. Die Bewegung des Apparats wird entweder ganz vernichtet oder so gering ausfallen, dass auf sie keine genaue Rechnung basirt werden kann. Es handelt sich also um eine weitere Methode, welche diese Lücke des Coulomb'schen Versuchs auszufüllen vermag.

Denken wir uns über der zu untersuchenden Flüssigkeit ein anderes dünnes Medium, welches an jener hafte, und die untere Scheibe in diesem schwingend, so wird die Bewegung sich bei kleiner Entfernung bis zu der dichten Flüssigkeit fortpflanzen und diese in Bewegung setzen. Es entsteht so eine Rückwirkung auf die Scheibe, und aus dieser muss sich die gesuchte Reibungsconstante berechnen lassen, wenn die des dünneren Mediums bekannt ist. Das Erfülltsein der Bedingung des Haftens muss sich aus dem Grad der Uebereinstimmung der aus Beobachtungen mit verschiedenen Entfernungen berechneten Reibungsconstanten ergeben. Ergiebt sich eine solche nicht für kleine b, so findet an der Grenzfläche ein Gleiten statt und es muss ein anderes Hülfsmedium gewählt werden; denn bei vorhandener Gleitung tritt neben

der gesuchten Constante noch die der äusseren Reibung als Unbekannte auf, und eine Berechnung Beider aus mehreren Beobachtungen kann leicht ungenaue Resultate liefern. Die Theorie werde ich später entwickeln und erwähne nur einen Gesichtspunkt bei der Wahl des Hülfsmediums. Man wird dieses Medium möglichst dünn wählen, aber dabei berücksichtigen, dass die Bewegung der dichten Flüssigkeit nicht zu klein ausfallen darf, um genaue Resultate zu geben.

III. Bestimmung der äusseren Reibung eines gasförmigen oder flüssigen Mediums mit einem festen Körper.

1. Die äussere Reibung ist unendlich.

Die Anordnung des Versuchs, um mittelst meines Apparats die äussere Reibung zweier Medien zu untersuchen, ist aus dem Früheren ersichtlich. Zur Entscheidung darüber, ob die äussere Reibungsconstante unendlich sei, dient die Gleichung X. Erscheint die berechnete Constante bei Variation der kleinen Entfernung nicht nahezu constant, so findet ein Gleiten statt, und es dienen dann die im Folgenden abgeleiteten Gleichungen zur Berechnung.

2. Die äussere Reibungsconstante ist endlich.

Wir lassen beide Scheiben im liquiden Medium schwingen und nähern der unteren die ebene horizontale Fläche eines festen Körpers. Die Bewegung des untersten Cylinders hat die Form $\Theta_2 = e^{-(lt+py)} \sin(nt - qy) - A\, e^{-(lt-py)} \sin(nt + q(y-B))$ und die anderen Cylinder stellen sich bei genügendem Abstand der Scheiben (35 — 40 mm.) in der Form dar: $\Theta_1 = E\, e^{-(lt+py)} \sin(nt - q(y+G))$, wo die Bedingung $\Theta_1 = \Theta_2$ besteht. Bei der Bildung der Bewegungsgleichung des Apparats tritt nur ein Unterschied in der Berechnung der Correction wegen der seitlichen Reibung des Cylinders 4 ein. Das Correctionsglied beträgt

$$-\varepsilon_2 \mu \int_0^b \frac{d^2\Theta_2}{dt\,dy}\,dy = -\varepsilon_2 \mu \left[\frac{d\Theta_2}{dt}\right]_0^b ;$$

ich setze hierfür mit ziemlicher Annäherung $\varepsilon_2 \mu \left(\frac{d\Theta_2}{dt}\right)$ und begehe wieder einen Fehler im Sinn meiner Theorie, welche vom schwingenden Medium zu viel verlangt, um kurz zu sprechen. Die Bewegung des Apparats hat dann den früheren Ausdruck. Um die Grenzbedingung an der Fläche $y = b$ abzuleiten, betrachten wir die Bewegung der von den Ebenen $y = b$ und $y = b - \Delta y$ begrenzten Schicht und lassen dann Δy Null werden. Bezeichnet σ die Constante der äusseren Reibung, so folgt:

$$\mu \left(\frac{d^2\Theta_2}{dt\,dy}\right)_b + \sigma \left(\frac{d\Theta_2}{dt}\right)_b = 0.$$

(Skizzirt man diese Relation in absoluten Massen, so ergeben sich die Dimensionen von σ gleich den oben angegebenen.)

Wir haben somit drei Doppelgleichungen, um A, B, E, G, D zu eliminiren und σ zu berechnen. Folgende Gleichungen enthalten die Lösung der Aufgabe:

XVIIIa.
$$c(1-2A\cos q B+A^2) - 2a_4\left(a+\frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{\mu\rho}\, A \sin q B - a_4\left(1-a\frac{\lambda}{\pi}\right) r \sqrt{\mu\rho}\,(1-A^2) = 0.$$

XVIIIb.
$$\begin{cases} e^{2pb}(a^2z_1^2 + (1+z_1)^2)\, A\cos q B = (1-(a^2+1)z_1^2)\cos 2qb - 2a z_1 \sin 2qb. \\ e^{2pb}(a^2z_1^2 + (1+z_1)^2)\, A\sin q B = (1-(a^2+1)z_1^2)\sin 2qb + 2a z_1 \cos 2qb. \\ e^{4pb} A^2 (a^2z_1^2+(1+z_1)^2)^2 = (1-(a^2+1)z_1^2)^2 + 4a^2z_1^2. \\ z_1 = \frac{\mu p}{\sigma};\quad q = ap; \end{cases}$$

die Grösse $\frac{\mu}{\sigma}$ ist die sogenannte Gleitungsconstante,

XVIIIc. $$c = \frac{2\lambda K}{\pi T} - 2\mu(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - (a_1+a_3)\, r\sqrt{\mu\rho}\left(1-a\frac{\lambda}{\pi}\right).$$

Nach dem Früheren ist leicht ersichtlich, wie sich aus diesen Formeln sowohl eine obere als eine untere Grenze herleiten lässt, sowie die Formeln für den Fall, dass die obere Scheibe in dem Medium 1, die untere in dem Medium 2 schwingen. Für Gase treten wieder die Näherungen $a = 1$, $q = p$, $r = \sqrt{\frac{\pi}{2T}}$ ein.

Um das Problem der Bestimmung der Reibung durch schwingende Scheiben zu erschöpfen, bleibt nur noch der Fall übrig, wo die äussere Reibung zweier liquiden Medien gesucht wird, und zwar wird es sich experimentell nur um ein Gas und eine tropfbare Flüssigkeit, oder um zwei solche handeln. Es bieten sich wieder zwei zu unterscheidende Fälle dar.

IV. Bestimmung der äusseren Reibungsconstante zweier liquiden Medien.

Die Beobachtung wird mit meinem Apparat so ausgeführt, dass die untere Scheibe horizontal über der dichteren Flüssigkeit schwingt, und je nachdem das dünnere obere Medium ein Gas oder eine Flüssigkeit ist, bewegt sich der ganze Apparat oder nur die untere Scheibe in demselben, wobei die obere dann in der Luft Schwingungen ausführt.

Um die äussere Reibungsconstante genau ermitteln zu können, müssen die beiden inneren Reibungsconstanten der gegebenen Medien bekannt sein; in dem Fall aber, wo jene unendlich oder doch so gross ist, dass die Gleitung zu vernachlässigen ist, kann man die innere Reibung des dichteren Mediums berechnen. Dieses Problem soll zunächst gelöst werden.

1. Die Reibungsconstante ist unendlich.

a. Entwicklung der Formeln.

Die obere Scheibe schwinge in dem Medium 1, die untere in 2, und genähert werde die Flüssigkeit 3. Dann sind vier verschiedene Bewegungen unter den von oben nach

unten mit 1 bis 5 bezeichneten Cylindern. Diese stellen sich unmittelbar in der Form dar:

$$\binom{1}{2}\ \Theta_1 = H\, e^{-(l t + p_1 y)} \sin(n t - q_1 (y - I))$$

$$(3)\ \Theta_2 = G\, e^{-(l t + p_2 y)} \sin(n t - q_2 (y - F))$$

$$(4)\ \Theta_3 = e^{-(l t + p_2 y)} \sin(n t - q_2 y) - A\, e^{-(l t - p_2 y)} \sin(n t + q_2 (y - B))$$

$$(5)\ \Theta_4 = C_1\, e^{-(l t + p_3 y)} \sin(n t - q_3 (y - D_1)),$$

wo $q_1 = a p_1$; $q_2 = a p_2$; $q_3 = a p_3$; zu Grunde gelegt sind vier verschiedene Coordinatensysteme; da aber kein Irrthum entstehen kann, sind die y wie früher nicht durch Indices zu unterscheiden.

Es haften die Medien an den Scheiben und die beiden untersten nach Voraussetzung an einander, also:

$$\left.\begin{matrix}\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 \\ y = o\end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix}\Theta_3 = \Theta_4 \\ y = b\end{matrix}\right\}$$

Wird die Correction wegen der Randreibung des untersten Doppelcylinders in meinem Sinn berechnet, so folgt als Correctionsglied:

$$\pi \varepsilon_2 \left\{ \mu_2 \left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)_o + (\mu_3 - \mu_2) \left(\frac{d\Theta_3}{dt}\right)_b \right\};$$

hierfür setze ich mit grosser Annäherung $\pi \mu_2 \varepsilon_2 \left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)_o$ und erhalte die Bewegungsgleichung des Apparats dann wieder in der früheren Form. Diese weitere Näherung ist aber nicht im Sinn meiner Theorie, welche den Reibungseffect zu gross ansetzt; indessen wird der Gesammtfehler in meinem Sinn ausfallen.

Um die Grenzbedingung für $y = b$ zu erhalten, betrachten wir den von den Ebenen $b - \Delta y$ und $b + \Delta y$ begrenzten dünnen Cylinder und gehen zur Grenze $\Delta y = o$ über; man erhält:

$$\mu_3 \left(\frac{d^2\Theta_4}{dt\,dy}\right)_b - \mu_2 \left(\frac{d^2\Theta_3}{dt\,dy}\right)_b \tau = o,$$

wo τ entweder gleich -1 oder $+1$ ist und so gewählt werden muss, dass $-\mu_2 \left(\frac{d^2\Theta_3}{dt\,dy}\right)_b \tau$ eine positive Grösse dar-

stellt; die Berechnung der Beobachtungen ergiebt, dass τ für kleine b den ersten Werth hat und in einer gewissen Entfernung (von ca. 1,7 mm. in meinen Experimenten) den Werth + 1 erhält. Dass diese Werthe alterniren, rührt daher, dass Θ_3 sich aus zwei entgegengesetzten Bewegungen zusammensetzt. Wir haben somit 5 Doppelgleichungen, um H, J, G, F, A, B, C_1, D_1, D zu eliminiren und μ_3 zu berechnen. Man erhält eine quadratische Gleichung und zwar in aller Strenge:

XIXa.
$$\begin{cases} z_2^2\left(C+1-a\frac{\lambda}{\pi}\right)-2z_2\left(Ck_2+(a+\frac{\lambda}{\pi})k_3\right) \\ \qquad\qquad +C-\left(1-a\frac{\lambda}{\pi}\right)=0 \\ z_2=\frac{1-k}{1+k}e^{-2p_2b};\ k=\tau\frac{\sqrt{\mu_2\rho_2}}{\sqrt{\mu_3\rho_3}};\ k_2=\cos 2q_2b; \\ \qquad\qquad k_3=\sin 2q_2b; \end{cases}$$

wo die in k, k_2, k_3 und p_2, q_2 involvirte Grösse μ_2 die Bedeutung μ'_{2m} hat (resp. μ_{2m}, wenn man die andere Grenze für σ berechnen will). Es ist

XIXb.
$$C=\frac{1}{a_4 r\sqrt{\mu'_{2m}\rho_2}}\left\{\frac{2\lambda K}{\pi T}-(2\varepsilon_1\mu'_{1c}+\varepsilon_2\mu'_{2c}+\varepsilon_2\mu'_{2m})\right\}$$
$$-\frac{1-a\frac{\lambda}{\pi}}{a_4\sqrt{\mu'_{2m}\rho_2}}\left(a_1\sqrt{\mu'_{1c}\rho_1}+a_3\sqrt{\mu'_{2c}\rho_2}\right)$$

Die Formeln, welche gelten, wenn beide Scheiben in demselben Gase schwingen, sowie die, welche die obere Grenze von σ darstellen, ergeben sich unmittelbar in der früheren Weise.

b. Bemerkungen über die Ausführung numerischer Rechnungen nach den entwickelten Formeln.

Die für den Fall zweier Flüsssigkeiten geltenden Gleichungen zeigen zunächst, dass ausser den Daten des Experiments noch μ'_{1c}, μ'_{2c} und μ'_{2m} bekannt sein müssen;

die beiden ersteren Grössen sind also experimentell und rechnend zu bestimmen nach den angegebenen Formeln; ihre genaue Kenntniss ist aber nicht so wesentlich, wie die von μ'_{2m}. Es muss diese Grösse als Funktion der Entfernung $\mu'_{2m} = \mu_2 (1 - \varphi(b))$ annähernd entwickelt werden, in ähnlicher Weise wie diese Gleichung für Luft unter der Annahme, dass μ'_{2m} sich linear mit der Entfernung ändere, aufgestellt wurde. Hierbei handelt es sich wesentlich um die Kenntniss der Entfernung, bis zu welcher die Bewegung sich merklich fortpflanzt.

c. Berechnung der inneren Reibungsconstante des Quecksilbers aus eigenen Beobachtungen.

Von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer angeregt, hatte ich mir die Aufgabe gestellt, in der besprochenen Weise die äussere Reibung zwischen Wasser und Quecksilber zu untersuchen. Da die Vermuthung nahe lag, dass ein Haften der Flüssigkeiten an einander stattfindet, berechnete ich die Beobachtungsdaten unter dieser Voraussetzung und fand die aus mehreren Versuchen berechneten inneren Reibungsconstanten des Quecksilbers unter sich und mit Bestimmungen anderer Beobachter in Uebereinstimmung, soweit es die bei der Messung von b erreichte Genauigkeit zuliess. Somit ergab sich mir, dass wirklich ein Haften stattfindet.

Es ist ersichtlich, dass die Grösse b mit ungleich grösserer Genauigkeit gemessen werden muss, wenn man aus einer diesartigen Combination von Luft und Wasser, Glycerin oder Quecksilber auf die äussere Reibung zwischen diesen Medien schliessen will. Aus diesem Grunde konnte ich aus diesen weiteren meiner Beobachtungen keine sicheren Schlüsse ziehen.

Zunächst handelt es sich um die Berechnung der Entfernung (b^0), bis zu welcher die Bewegung im Wasser sich fortpflanzt; hierzu genügt die Kenntniss des Decrements L^0, welches dem Versuch entspricht, wo die obere Scheibe in der Luft, die untere im unbegrenzt gedachten Wasser schwingt;

der Grundgedanke der Rechnung ist derselbe, welcher zur Bestimmung der gesuchten Grösse für Luft führte (II 2 b_α). XVIa, b wird die untere, XVIa, c die obere Grenze ergeben, wenn für λ, b, μ'_{2m}, μ_{2m} der Reihe nach λ^0, b^0, μ'_{2c}, μ_{2c} gesetzt werden. Stellen C'^0 und C^0 die Werthe C aus XVIb und XVIc dar, wenn $\lambda = \lambda^0$ gesetzt ist, ferner r^0, a^0 die entsprechenden Werthe von r und a, so lauten jene Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} C'^0 &= a_4\ r^0\ \sqrt{\mu'_{2c} \cdot \rho_2}\ \alpha^1 \\ C^0 &= a_4\ r^0\ \sqrt{\mu_{2c} \cdot \rho_2}\ \alpha \end{aligned}\right\} \text{ wo}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha^1 \\ \alpha \end{matrix}\right\} = \frac{2\left(a^0 + \frac{\lambda^0}{\pi}\right)\sin 2qb + \left(1 - a^0\frac{\lambda^0}{\pi}\right)\left(e^{2pb} - e^{-2pb}\right)}{e^{2pb} + e^{-2pb} - 2\cos 2qb},$$

je nachdem das in p und q involvirte μ_2 die Bedeutung μ'_{2c} oder μ_{2c} hat; beide Grössen enthalten λ^0. Der Rechnung lege ich folgende Constante zu Grunde:

$$\left.\begin{matrix} \mu'_{1c} = \frac{0{,}0185}{1{,}15} \\ \mu_{1c} = 0{,}043 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \mu'_{2c} = \frac{1{,}000}{1{,}15} \\ \mu_{2c} = 1{,}326 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} T_1 = 32'',00 \\ T_2 = 33'',69 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} L_1^0 = 0{,}0923 \\ L_2^0 = 0{,}0948 \end{matrix}\right\}$$

und zwar entsprechen die 2 Werthe von L und T den beiden Drehungsmomenten.

Es ist ersichtlich, dass die Grenzen b^0 und b'^0, wenn diese aus meiner Theorie, jene aus der ersten Näherung folgt, also $b'^0 < (b^0) < b^0$ ist, nur durch successive Annäherung bestimmt werden können. Ich erhalte

$$\alpha^1 = \left.\begin{matrix} 0{,}9181 \text{ I Dr.-M.} \\ 0{,}9123 \text{ II } \text{„} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2p^1 = 0{,}4592 \text{ I} \\ 0{,}4471 \text{ II} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2q^1 = 0{,}4914 \text{ I} \\ 0{,}4793 \text{ II} \end{matrix}\right\}$$

und zur Berechnung von b^0

$$\alpha = \left.\begin{matrix} 0{,}9254 \text{ I} \\ 0{,}9309 \text{ II} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2p = 0{,}3719 \text{ I} \\ 0{,}3621 \text{ II} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2q = 0{,}3979 \text{ I} \\ 0{,}3882 \text{ II} \end{matrix}\right\}$$

wo α^1 und α die obige Bedeutung haben.

Zur Berechnung von b'^0 und b^0 führte ich folgende Rechnungen aus:

b° mm.	α^1 berechnet I Dr.-M.	α^1 berechnet II Dr.-M.
10	0,9085	0,8994
11	0,924	0,9184
10,7	0,9203	0,9138
10,55	0,9177	0,9118
—	(0,9181)	(0,9123)

b° mm.	α berechnet I Dr.-M.	α berechnet II Dr.-M.
15	0,9316	—
14	0,9272	—
13,5	0,9238	—
13,7	0,9249	0,9197
16	—	0,9306
16,2	—	0,9308
16,5	—	0,9309
—	(0,9254)	(0,9309)

Hieraus folgt bei beiden Drehungsmomenten dieselbe untere Grenze $b^{\circ} = 10{,}6$ mm., dagegen als obere 13,8 mm. und 16,5 mm.

Also haben wir die Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 10{,}6 < (b^0) < 13{,}8\,\text{mm.} \\ 10{,}6 < (b^0) < 16{,}5\,\text{mm.} \end{array}\right\}$$ und der wahre Werth muss der unteren Grenze näher liegen. Die Bewegung pflanzt sich im Wasser also ungefähr $^1/_2$ mal so weit fort, wie in der Luft. Ich setze mit geringem Fehler $b^0 = 11$, und erhalte unter der Annahme, dass μ'_m eine lineare Funktion von b sei:

$$\mu'_m = \mu\left(1 - (1 - \frac{1}{1{,}15})\ \frac{b}{11}\right) \text{ oder } \mu'_m = \mu\,(1 - 0{,}01186\,b),$$

und für $\mu = 1$ als der mittleren Beobachtungstemperatur entsprechend $\mu'_m = 1 - 0{,}01186\,b$. Aus dieser Gleichung ist der Werth μ'_{2m}, welcher in das Experiment eingeht, für das betreffende b zu berechnen.

Ehe ich zur Mittheilung der numerischen Resultate übergehe, möchte ich noch kurz darauf hinweisen, wie stark der berechnete Werth μ_3 von einer fehlerhaften Bestimmung von b beeinflusst wird. Fixire ich einen gewissen Abstand b^1 und ändere successiv das Medium 3, wobei $\mu_3\,\rho_3$ alle Werthe von o bis ∞ durchlaufen möge, so wird die Differenz der in beiden extremen Fällen beobachteten Decremente jedenfalls kleiner sein als das Decrement, welches beobachtet wird, wenn in der Entfernung b^1 sich eine feste horizontale Fläche befände und ein Haften stattfände. Ein geringer Fehler bei der Bestimmung von L muss also bei constant gedachtem ρ_3 einen erheblich veränderten Werth von μ_3 zur Folge haben. Denke ich andererseits ein Decrement L^1 fixirt, so muss ein geringer Fehler in der Bestimmung von b die berechnete Grösse μ_3 bedeutend beeinflussen. Aus diesem Grunde habe ich die Beobachtungsdaten L und T derartig verwandt, dass ich durch successive Annäherung die Entfernung b berechnet habe, bei welcher μ_3' mit dem von anderen Beobachtern auf anderem Wege berechneten Werth $\mu_3 = 1{,}6$ beinahe zusammenfällt. Es ergiebt sich, dass die Differenz des berechneten Werthes b mit dem beobachteten innerhalb der Grenzen der Genauigkeit meiner Messung liegt. Es würde daraus der Schluss zu ziehen sein, dass Wasser und Quecksilber an einander haften und der früher gefundene Werth für die innere Reibungsconstante des Quecksilbers eine weitere Bestätigung erhalten.

In den folgenden Tabellen stelle ich die Daten der Beobachtung und Rechnung zusammen:

No. d. Exp.	Dat. Aug.	Temp. C°	Dreh. Mom.	T	L
17—21	9	—	I.	31″,47	0,099241
43—45	14	—			0,10960
5—9	7	—			0,19440
76—77	20	20,°0	II.	33″,15	0,11864
61	18	19,°0			0,12340
62	18	19,°0			0,18541
75	20	20,°0			0,26141

No. d. Exp.	Mit Zugrundelegung von b	berechnet sich μ_3'	τ	b mm. (beobachtet)
17–21	4,0	1,542	+ 1	3,85
43–45	2,94	1,56	+ 1	3,1
5–9	1,536	1,54	— 1	1,6
76–77	2,62	1,57	+ 1	2,7
61	2,35	1,5	+ 1	2,5
62	1,74	1,5	— 1	1,7
75	1,00	1,6	— 1	1,05

Mit den bekannten Hülfsmitteln ist es nicht leicht möglich, die Grösse b so genau, wie es erforderlich ist bei diesen Experimenten, zu bestimmen. Die Messung wird ausserdem noch durch die vielen Lichtreflexe an dem convexen Rande des Quecksilber-Niveaus bedeutend erschwert und unsicher gemacht.

2. Die äussere Reibung ist endlich; es findet ein Gleiten statt.

a. Entwicklung der Gleichungen.

Dieser Fall als der allgemeinste erheischt besonderes Interesse, da er alle früher behandelten mit Ausnahme des Problems CH_3 in sich enthält. Das Problem führt auf eine Gleichung 4. Grades zur Bestimmung der äusseren Reibungsconstante; die Anordnung ist dieselbe wie beim vorigen Experiment; die obere Scheibe schwingt in der Luft (1), die untere im Medium 2, dieses ruht auf einem flüssigen Medium 3, welches der Scheibe genähert wird. Unter den fünf schwingenden Cylindern sind vier verschiedene Bewegungen, welche sich ebenso wie beim vorigen Experiment analytisch darstellen; bezeichne ich wieder die Cylinder von oben nach unten mit 1 bis 5, so haben Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 die frühere Bedeutung; es gelten wieder die Bedingungen:

$$\left.\begin{matrix}\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 \\ y = o\end{matrix}\right\}$$ und die frühere Grenzbedingung:

$\mu_3 \tau \left(\frac{d^2\Theta_3}{dt\,dy}\right)_b = \mu_3 \left(\frac{d^2\Theta_4}{dt\,dy}\right)_b$, wo τ, wie angegeben, die Werthe ± 1 hat. Zu dieser tritt eine weitere Grenzbedinge; diese erhalten wir, wenn man die Bewegung des von den Ebenen $b - \Delta y$ und b begrenzten dünnen Cylinders analytisch ausdrückt und dann Δy gleich Null werden lässt. Ist σ die äussere Reibungsconstante, so folgt:

$$\left(\frac{d^2\Theta_3}{dt\,dy}\right)_b \mu_2 \tau + \sigma \left\{\left(\frac{d\Theta_3}{dt}\right)_b - \left(\frac{d\Theta_4}{dt}\right)_b\right\} = 0,$$

wo τ dieselbe Bedeutung hat. Der Betrag der seitlichen Reibung des untersten Doppelcylinders berechnet sich nach meiner Methode gleich

$$\varepsilon_2 \pi \left\{\mu_2 \left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)_0 + \mu_3 \left(\frac{d\Theta_4}{dt}\right)_b - \mu_2 \left(\frac{d\Theta_3}{dt}\right)_b\right\};$$

um die Rechnung zu vereinfachen, setze ich hierfür mit grosser Näherung $\varepsilon_2 \pi \mu_2 \left(\frac{d\Theta_1}{dt}\right)_0$, stelle die Correction also wieder in der früheren Form auf. Ob diese zweite Näherung im Sinn meiner Theorie liegt, d. h. ob dieser Betrag zu gross ist, ist nicht zu entscheiden; die gesammte Näherung wird aber sicher zu viel Reibung in Rechnung bringen. Die Bewegungsgleichung des Apparats ist dann wieder genau die frühere. Mittelst der aufgestellten 5 Doppelgleichungen kann man σ berechnen, wenn μ_2 und μ_3 bekannt sind. Die strenge Lösung des Problems ist in folgenden Gleichungen enthalten:

XXa. $$C(1-2A\cos q_2 B + A^2) - 2a_4 r \left(a + \frac{\lambda}{\pi}\right) \sqrt{\mu_2 \rho_2}\, A \sin q_2 B$$
$$+ a_4 r \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right) \sqrt{\mu_2 \rho_2}\, (A^2 - 1) = 0.$$

$$\left\{(1 + k(1+z))^2 + a^2 k^2 z^2\right\} A \cos q_2 B = -2akz \cdot e^{-2p_2 b} \sin 2q_2 b$$
$$+ (1 - k^2(1+z)^2 - a^2 k^2 z^2)\, e^{-2p_2 b} \cos 2 q_2 b$$

$$\left\{(1 + k(1+z))^2 + a^2 k^2 z^2\right\} A \sin q_2 B = 2akz \cdot e^{-2p_2 b} \cos 2 q_2 b$$
$$+ (1 - k^2(1+z)^2 - a^2 k^2 z^2)\, e^{-2p_2 b} \sin 2 q_2 b$$

$$k = \tau \sqrt{\frac{\mu_2 \rho_2}{\mu_3 \rho_3}}; \quad z = \frac{\mu_3 p_3}{\sigma}.$$

XXb.
$$C = \frac{2\lambda k}{\pi T} - 2(\varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2) - (a_1 \sqrt{\rho_1 \mu_1} + a_3 \sqrt{\rho_2 \mu_2})\, r \left(1 - a\frac{\lambda}{\pi}\right).$$

Den genaueren Ausdruck für C erhält man nach Früherem, wenn die Grössen μ ihrer Bedeutung nach aufgefasst werden; in p_2 und q_2 sind μ'_{2m} resp. μ_{2m} involvirt, je nachdem man für σ die untere oder obere Grenze sucht; in letzterem Falle verschwinden insbesondere ε_1 und ε_2.

Die entwickelte Gleichung in z wird 4. Grades; da man aber meistens durch approximative Annahmen über die relative Grösse von σ die Rechnung vereinfachen kann und weitere Näherungen an obigen Gleichungen leichter einzuführen sind, so gebe ich die entwickelte Gleichung in z nicht an.

b. Zusammenhang mit den früheren Problemen.

Bezeichnen wir mit μ_3 die innere Reibungsconstante des untersten Mediums, mit σ wie bisher die äussere Reibungsconstante, welche an der Grenze $y = b$ auftritt, so können nur folgende Fälle eintreten:

μ_3	σ	b	
endl.	endl.	endl.	IV_2
∞	endl.	endl.	III_2
endl.	∞	endl.	II_4 (IV_1)
∞	∞	endl.	II_2 (III_1)
—	—	∞	II_1

Das behandelte Problem II_3 nimmt eine gesonderte Stellung ein. In der Reihenfolge $1, \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}, 4, 5$ müssen sich die Gleichungen jedes folgenden Problems aus den Formeln des vorangehenden ableiten lassen. Dies ist leicht durchzuführen, da für $\mu_3 = \infty$, $k = o$ ist, und für $\sigma = \infty$, $z = o$ wird; dabei ist $kz = \tau r \frac{\sqrt{\mu_2 \rho_2}}{\sigma}$.

D. Schluss.

Es ist dargethan worden, wie das Maxwell'sche Experiment allein zu einer möglichst genauen Bestimmung der inneren Reibungsconstante führen kann; ferner hat sich gezeigt, dass die Probleme der Bestimmung der äusseren Reibung zweier liquiden Medien auf diesem experimentellen Wege erst dann zu genauen Resultaten führen werden, wenn Mittel und Wege erschlossen sein werden, den Abstand der Scheibe von der Grenzfläche mit der Genauigkeit zu messen, wie es beim Maxwell'schen Experiment (durch zwischengelegte Glasstückchen) möglich ist.

Zum Schluss muss ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer, nochmals meinen grössten Dank für seine freundliche Förderung meiner Erstlingsarbeit aussprechen, und ihm an dieser Stelle besonders für die Mühe und Sorgfalt danken, welche er im mathematisch-physikalischen Seminar für seine Schüler aufwendet.

Thesen.

1. Die genaueste Bestimmung der inneren Reibungsconstanten liefert die Maxwell'sche Methode mittelst der für die Constanten aufgestellten Grenzformeln.
2. Jede physikalische Gleichung ist der mathematische Ausdruck der geometrischen Verkörperung eines physikalischen Gedankens.
3. Die Kant-Laplace'sche Hypothese ist für die Astronomie nicht fruchtbar; — die Plateau'schen Versuche sind unzureichend, um sie zu demonstriren.
4. Die Bestreitung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht auf einer Verwechselung des contradictorischen und conträren Gegensatzes.

Lebenslauf.

Ich, Louis Adolph Grossmann, bin geboren den 24. September 1855 zu Brooklyn bei New-York und bin der Sohn des im Jahre 1877 zu Grünberg i. Schl. verschiedenen Fabrikbesitzers Louis A. Grossmann, und evangelischer Confession. Nach einem ersten häuslichen Unterricht und dem Besuch verschiedentlicher Schulen in Staten-Island, New-York und Brooklyn trat ich Michaelis 1867 in Grünberg in die Quinta der Realschule I. Ordnung ein. Auf einer im Frühjahr 1870 nach New-York unternommenen Besuchsreise wurde ich durch den Ausbruch des deutsch-französischen Krieges an der Rückreise gehindert und kehrte erst im Nov. 1871 mit den Meinigen nach Grünberg zurück. Dort besuchte ich genannte Schule weiter und erlangte 1875 das Zeugniss der Reife. In der Folge studirte ich je fünf Semester in Berlin und Breslau und genügte meiner Militärpflicht in letzterer Stadt.

Ich hörte mathematische, astronomische, physikalische und philosophische Vorlesungen bei den Herren: Bruns, Dilthey, Dorn, Foerster, Frobenius, Galle, Grube, Helmholtz, Kirchhoff, Kronecker, Kummer, O. E. Meyer, Rosanes, Schroeter, Tietjen, Wangerin, Weierstrass und Zeller, nahm während eines Semesters an den Uebungen des physikalischen Seminars des Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer Theil, und arbeitete ebensolange im physikalischen Institut unter der Anleitung der Herren Professoren DDr. Meyer und Dorn.

Allen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für die mir zu Theil gewordene Anregung und Förderung aus, insbesondere bin ich Herrn Prof. O. E. Meyer für die gütige Bereitwilligkeit, mit welcher dieser mir die Mittel seines Instituts zur Verfügung gestellt hat, zu grösstem Dank verpflichtet.